МИНИСТЕРВСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.А. Павский

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
(*элементы теории и приложения*)

Учебное пособие

Кемерово 2017

УДК 519.872(07)
ББК 22.176я7
П12

Рецензенты:
В.К. Трофимов, декан факультета информатики и Вычислительной техники СибГУТИ, зав.кафедрой высшей математики, д.т.н. профессор,
А.М. Гудов, директор Института фундаментальных наук КемГУ, д.т.н. доцент

Рекомендовано редакционно-издательским советом Кемеровского технологического института пищевой промышленности

Павский В.А.
П12 Теория массового обслуживания (элементы теории и приложения): учебное пособие / В.А. Павский. - 2-е изд., испр. и доп. - Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2017. – 130 с.
ISBN

Изложены основы теории массового обслуживания, в круг интересов которой входят многие направления применения случайных процессов в современной практике. При построении моделей используется методология марковских процессов. Сформулированы модели, часто используемые в практическом анализе реальных объектов и систем. Изложены необходимые сведения из теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Предназначено для студентов и аспирантов экономических специальностей направления 38.03.01. Будет полезно студентам и преподавателям инженерных специальностей вузов.

УДК 519.872(07)
ББК 22.176я7

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания* (ТМО, американский вариант - The Theory of Queues) относительно молодая математическая наука, возрастом менее 100 лет. Ее появление обусловлено желанием обслуживаться объектам обслуживания в разумно комфортных временных условиях при затратах близких к минимально возможным. До середины 19-го века во взаимоотношениях людей, в том числе и в сфере услуг, особых проблем не возникало. Проблемы конечно были, но не системные и связаны, в основном, с экстремальными ситуациями, где требовалось всем все и сразу, например, посадка на пароходы; выход зрителей из театров и стадионов по окончании представлений; войны; диверсии. Сразу здесь не получалось, поскольку приходилось ждать, а ожидание порождало очередь. С развитием индустриализации – промышленности и технологий (со второй половины 19-го века), сопровождавшихся еще и ростом населения, проблема очередей стала глобальной. Ускорение научно-технического прогресса добавило зависимости от общественных отношений, информации, машин и механизмов. В начале 20 века были сформированы предпосылки для возникновения теории очередей.

Основателем ТМО считается А.К. Эрланг (1878-1929) – датский инженер, математик. Работая на телефонной станции, он изучал разговоры, с целью минимизации времени ожидания. Работы Эрланга быстро завоевали популярность (формула Эрланга [9, 12 - 14]), поскольку были посвящены одной из самых безрадостных сторон нашей жизни – очередям.

Опыт показывает, что практическое применение моделей массового обслуживания наиболее эффективно в таких направлениях как сфера услуг, военное дело [3], промышленность, прежде всего, это электроника и быстродействующие вычислительные средства, состоящие из сотен тысяч активных элементов [3, 4]. К таким объектам

* Термин введен А.Я. Хинчиным (1894-1959) [14], в 50-х годах прошлого века.

относятся вычислительные системы, вычислительные сети, кластерные и Grid-системы [9, 12], суперкомпьютеры [10, 16, 20], решающие различного рода задачи пользователей, обслуживаемые сервисными программами, которые в автоматическом режиме диагностируют, поддерживают надежность, живучесть, производительность [3, 10]. Функционирование таких объектов - это готовые модели ТМО [10]. Последние десятилетия методы ТМО нашли применение в процессах химической технологии [11, 17] и биотехнологии [7, 18, 19]. Однако, проведение научного анализа той или иной практической задачи массового обслуживания [11] можно считать оправданными лишь при том условии, что экономические последствия управляющих решений в рассматриваемой сфере деятельности должны быть весьма существенными.

Очередь портит нам настроение, из-за нее мы теряем время, опаздываем, суетимся, несем огромные экономические потери и проигрываем. Полностью избавиться от этого раздражителя, пожалуй, не удастся, но уменьшить его влияние возможно. В нашем понимании *очередь – это совокупность объектов, находящихся в ожидании и требующих обслуживания*. Из толкования очереди не следует, что она присуща только людям, хотя и эксплуатируется нами. Например, непосредственно, живые очереди присутствуют в сфере услуг, от предприятий общественного питания и бытового обслуживания, супермаркетов и салонов красоты, до дорожных пробок, телефонной и беспроводной связи, интернета. Опосредованно - от управления и организации промышленными и сельскохозяйственными предприятиями, до здравоохранения и регулирования уровня воды в водохранилищах [13]) и ее очистки [11]. С очередями можно связать практически любую сложную систему, состоящую из большого числа активных элементов, например, самодиагностика систем, отмеченных ранее.

Это далеко неполный перечень объектов экономической, и не только, системы, в той или иной мере имеющих отношение к очередям. Во всех примерах, помимо очереди, можно выделить потоки событий (требований), появляющихся и исчезающих (обслуженных) во времени [2, 11, 15]. Если не удается справиться с очередью, то это приводит как к количественным, так и к качественным изменениям и почти всегда к экономическим потерям. Исследование важных для существования человека событий, выявление закономерностей их наступления и исчезновения имеет большое научное, практическое и экономическое значение. Над созданием и развитием ТМО работали крупнейшие отечественные ученые: Колмогоров А.Н. (уравнения Колмогорова), Хинчин А.Я. (один из создателей ТМО, формула Поллачека - Хинчина), Гнеденко Б.В. (резервирование с восстановлением, теория надежности), Ширяев А.Н. (уравнения нелинейной фильтрации), Боровков А.А. (асимптотические методы), Вишневский, А.М (системы поллинга), Ивницкий В.А. (нестационарная теория марковских сетей массового обслуживания), Медведев Г.А. (численные проблемы анализа марковских цепей и систем массового обслуживания), Терпугов А.Ф. (управляемые системы массового обслуживания).

Теория массового обслуживания долгое время считалась разделом теории вероятностей и случайных процессов. Ее модели представляют собой, динамические системы специального вида, целью исследования которых является *рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания* на основе изучения потоков требований (событий) на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из неё. Важными элементами моделей являются параметры входящих и выходящих потоков требований, характеризующих длительности ожидания чего-либо, существование очередей, числа обслуживающих приборов, экономических параметров.

В настоящее время ТМО рассматривается как самостоятельная математическая наука, имеющая свою область исследования, со своими постулатами и теоремами, и возникающие проблемы решает собственными силами. Методы теории массового обслуживания в большей степени основаны на анализе, чем на синтезе и используются для обобщений и определения направлений преодоления возникающих проблем.

Модели ТМО, в силу сложности, сначала формулируются описательно в терминологии систем массового обслуживания (СМО) с использованием параметров. Чем сложнее СМО, тем больше параметров или входящие и выходящие потоки событий не экспоненциальные. Формализуются модели обычно системами дифференциальных уравнений или матричными уравнениями, а неизвестные функции, это, почти всегда, распределение вероятностей, реже моменты, из которых конструируются показатели эффективности. Если модель многопараметрическая, то решение находится или приближенно, как правило, на компьютере, часто с использованием стандартных, лицензионных программ или методом Монте – Карло [2, 3]. Поскольку, большинство параметров статистические, то может возникнуть проблема достоверности статистических исследований. Принципиально статистику получить можно, но для качественного исследования, если модели получаются многопараметрическими, где каждый параметр требует достоверную статистику, это не всегда выполнимо [2, 10]. Для устранения проблем используют статистические методы оптимизации экспериментальных исследований [1].

При использовании стандартных программ, содержащийся в них набор показателей эффективности всегда считается полным (это инструментарий для анализа реальных явлений). Если распределение вероятностей получено, и из него, по мнению исследователя, сформулирован достаточный набор показателей эффективности, то этот набор объявляется также полным, как необходимое условие для объективного анализа СМО. Кроме того, поскольку модели ТМО напрямую связаны с изменениями структуры СМО, а это всегда потери, то привлекают дополнительные показатели эффективности, включая экономические [9]. В большинстве моделей, помимо описания, используется неформальный графический материал и только потом применяют, собственно, математическую формализацию.

Задачей ТМО, как дисциплины, является обучение студентов современным методам и средствам моделирования систем массового обслуживания, основанных на использовании современного математического аппарата и доступных средств разработки моделей СМО, развитие у студентов навыков их практического применения. Для успешного изучения дисциплины студентам необходимы знания стандартного курса вузовской математики, теории вероятностей и математической статистики, основ теории графов и информационных технологий (IT) [12]. Область применения ТМО чрезвычайно широка, как в прочем широк и математический аппарат, используемый при формализации и поиске решений, поэтому знакомство с практическим использованием ТМО в настоящем пособии ограничено сферой услуг. ТМО изучает объекты, в той или иной мере связанные со случайностью, что может вызвать трудности при усвоении материала.

В пособии приведены основные понятия теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов. При первом чтении достаточно знания основных разделов стандартного курса математики, изучаемой в технических вузах. Дальнейшее изучение материала потребует привлечения дополнительной литературы.

Для выполнения контрольной работы в книге представлены относительно простые модели, допускающие аналитические решения. Тем самым предполагается, что читатель сможет лучше понять суть методов построения моделей, их анализ и оценить возможности практической реализации. Изложение математических приемов, используемых в задачах ТМО, нередко не столь уж существенны для восприятия результатов, если иметь в виду прикладной аспект теории, поэтому вывод некоторых формул приведен кратко, со ссылками на соответствующую литературу.

Цель пособия – познакомить обучающихся с моделями и методами ТМО, показать эффективность их применения при решении практических задач.

Пособие состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка, приложений (шесть таблиц) и двух дополнений.

Первый и второй раздел носят информативно-вспомогательный характер: приведены сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для усвоения основного материала.

В третьем разделе даны сведения из теории случайных процессов и теории массового обслуживания: приведены основные определения, рассмотрены марковские цепи и процессы, описаны потоки случайных событий, сформулированы цель и задачи теории массового обслуживания, приведена классификация моделей.

Четвертый раздел содержит примеры систем массового обслуживания. Приведен анализ эффективности функционирования системы массового обслуживания с ожиданием. Описана структура выполнения задания по применению методов ТМО для анализа работы реальных систем массового обслуживания.

В главе 5, сформулированы, в терминологии ТМО, 5 моделей СМО, их формализация, решение и предложен набор показателей эффективности, записанных в аналитическом виде. Каждая модель имеет свои показатели эффективности.

В приложениях для облегчения вычислений приведены часто используемые функции и их значения.

В дополнениях содержатся сведения из операционного исчисления и производящих функций, не входящие в стандартный курс математики.

Для студентов. Учитывая сложность усвоения ТМО, при выполнении работы поощряются профессиональные предпочтения обучающихся:

- желание заниматься административной деятельностью и бизнесом отражается в развернутом введении, с элементами рекламы, ясной постановке задачи, выводах и обоснованном прогнозе развития анализируемого объекта;
- склонность к инженерно-аналитической деятельности находит себя в качественной постановке задачи, желании разобраться в используемом математическом аппарате, расчете нескольких вариантов и обосновании выбора лучшего среди них;
- склонность к исполнительской (технологической) работе определяется характером введения, детальной постановкой задачи, подробным анализом результатов, выводами.

При качественном выполнении хотя бы одного из них итоговая работа обучающегося оценивается положительно.

Моя искренняя благодарность профессору кафедры Ивановой Светлане Анатольевне, за замечания, дополнения и активное участие в подготовке второго издания этого пособия.

1 СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Основные понятия

Под **случайными** будем понимать набор **событий,** каждое из которых обладает возможностью реализоваться (быть участником эксперимента), и реализуется одно из них [12].

Из описательного определения случайного события следует, что у каждого события должно быть хотя бы одно альтернативное (если A - событие случайное, то $\overline{A}$ - альтернативное), то есть предполагается, что в единственном числе случайные события не формализуемы.

Событие, которое всегда происходит (при неизменяемых условиях), называется **достоверным.**

При изучении случайных событий, мы предполагаем, что потенциально любое из них «за бесконечное время реализуется бесконечное число раз». Оценивать случайное событие будем числом появлений его в единицу времени, связанного с вероятностью.

Пусть Ω - множество мыслимых исходов эксперимента. Каждый исход эксперимента определяется как **элементарное случайное событие** ω, а их множество $\Omega=\{\omega\}$ – **пространство элементарных (случайных) событий**. Элементарные события $\omega\in\Omega$ будем называть также точками пространства Ω [5, 12]. Элементарные события считаются **несовместными,** поскольку любая пара из них не может произойти одновременно (результат эксперимента однозначен). То есть источником понятия несовместности событий можно считать элементарные события. Если число точек Ω конечно или счетно, то оно называется **дискретным**. Если они заполняют часть или даже всю действительную ось, то **непрерывным**.

Любой набор i точек ω_i, $\omega_i \in \Omega$, образует **случайное событие** $A=\{\omega_i\}\subset\Omega$, $i=1,2,...,\ k$, $k\in N=\{1,2,...,n,...\}$. Если $\forall(A,B\subset\Omega)\Rightarrow(((A\bigcup B)\subset\Omega)\wedge((A\bigcap B)\subset\Omega)\wedge(\overline{A}\subset\Omega))$, и эти условия выполняются для любого числа событий, то говорят, что в Ω задана **алгебра** событий Λ.

Каждому событию $A \subset \Omega$ поставим в соответствие его меру – $p = P\{A\} \geq 0$. Если эта мера удовлетворяет аксиомам:

аксиома 1. $P\{A\}$ существует для любого $A \subset \Omega$,

аксиома 2. $P\{\Omega\} = 1$,

аксиома 3. $P\left\{\bigcup_i \omega_i\right\} = \sum_i P\{\omega_i\}$,

то она называется **вероятностью** события *A*. Само Ω всегда происходит, поэтому оно называется **достоверным** событием, а его отрицание $\overline{\Omega} = \varnothing$ будем называть **невозможным** событием. Ясно, что $P\{\varnothing\} = 0$ [6, 12].

Определение События *A* и *B* называются **несовместными**, если $A \bigcap B = \varnothing$ (вспомним о свойствах элементарных событий).

Из аксиом вероятности следует, что $\forall (A \subset \Omega) \Rightarrow (0 \leq P\{A\} \leq 1)$.

Пространство Ω, алгебра событий Λ и определенная для каждого их них вероятность *P*, определяют аксиоматический подход построения теории вероятностей. Если Ω не более чем счетное, то тройка (Ω, Λ, P) называется **вероятностным пространством** или **аксиоматикой Колмогорова** элементарной теории вероятностей,.

Теорема (*сложения вероятностей*): для любых $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ справедлива формула:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{i<j} P\{A_i \cap A_j\} + ... + (-1)^{n-1} \cdot P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\}.$$

В частности, $\forall A, B \subset \Omega$ имеет место

$$P\{A \bigcup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \bigcap B\}.$$

Определение. События *A* и *B* называются **независимыми**, если вероятность их совместного осуществления равна произведению вероятностей этих событий, то есть

$$P\{A \bigcap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}. \tag{1.1}$$

Утверждение. Если события несовместны, то они зависимы.

События $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и сумма вероятностей этих событий равна 1, то есть

1) $\forall (i \neq j) \Rightarrow (A_i \bigcap A_j = \varnothing)$,

2) $P\left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} = 1$.

В частности, $P\{A\} + P\{\overline{A}\} = 1$.

Замечание. Для несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$

вместо аксиомы 3, часто используется более удобная

а*ксиома 3**. $P\left\{ \bigcup_{i=1} A_i \right\} = \sum_{i=1} P\{A_i\}$.

1.2 Классический метод вычисления вероятностей

Пусть дано (Ω, Λ, P) вероятностное пространство и $A \subset \Omega$. Событие A состоит только из элементарных событий $\omega_i \in \Omega$. Так как Ω конечно, то из его элементов можно составить 2^n подмножеств, образующих минимальную алгебру Λ, одно из подмножеств которой событие A, $\mathrm{A} \subset \Lambda$. Каждому элементарному событию ω_i поставлена в соответствие вероятность, p_i, в совокупности они определяются как распределение вероятностей P, удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=1} P\{\omega_i\} = \sum_{i=1} p_i = 1.$$

Для полного описания вероятностного пространства остается найти вероятности p_i, но аксиоматика Колмогорова ограничиваеится только существованием этих вероятностей.

Классический метод вычисления вероятностей случайных событий позволяет, используя понятие распределения вероятностей, находить вероятности событий **непосредственно из аксиом**.

Пусть а) Ω состоит из **конечного** числа n элементарных событий; б) все элементарные события **равновозможные**, (каждому элементарному событию ω_i поставлена в соответствие вероятность

$$P\{\omega_i\} = \frac{1}{n},\ i = 1,2,...,n),$$

тогда имеет место **формула классического вычисления вероятностей**

$$P\{A\} = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

В самом деле, рассмотрим событие $A \subset \Omega$, которое состоит из m элементарных событий: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\}$, тогда из аксиомы вероятности 3, в силу несовместности элементарных событий, следует, что

$$P\{A\} = P\{\cup_{k=1}^{m} \omega_{i_k}\} = \sum_{k=1}^{m} P\{\omega_{i_k}\} = \sum_{k=1}^{m} 1/n = m/n\,. \ \blacktriangledown$$

Формула (1.1) читается следующим образом: *при выполнении условий а) и б), вероятность событию А произойти равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих появлению события А, к числу* $n=|\Omega|$ *всех элементарных событий* Ω.

1.3. Статистический метод нахождения вероятности

Классический метод вычисления вероятностей событий представляет собой теоретическую схему, которая основывается на аксиомах теории вероятностей, и, тем самым, не зависит от реального объекта исследования. Для его применения необходимо владеть всей информацией о возможных исходах эксперимента (то есть описать Ω). После применения формулы (1.2) к реальному явлению, необходимо подтверждать полученный результат дополнительными экспериментами.

На практике мы далеко не всегда можем описать пространство Ω даже в случае равновозможности элементарных событий. Окончательный ответ на эти вопросы может дать статистический метод вычисления вероятностей событий.

Пусть проведено n испытаний, в которых событие A появилось m раз.

Определение. **Частотой** $W_n(A)$ появления события A в n испытаниях называется переменная величина, определяемая как доля числа случаев m из n возможных, в которых событие A появилось:

$$W_n(A) = m/n.$$

Замечание. Говоря о частоте, следует понимать, что результат любого испытания заранее **не предсказуем**; учитываются только те результаты, которые мы ожидали получить. Если появился новый результат, то мы должны предполагать, что он возник из **равноценных** начальных условий и **одних и тех же начальных знаний**. Испытания должны быть **независимыми**, или казаться нам независимыми, в том смысле, что, во-первых, каждое повторное испытание проводится при одном и том же комплексе начальных условий, во-вторых, результатом эксперимента считаются два исхода: событие A появилось либо событие A не появилось. Частота должна быть **устойчива**, то есть, при достаточно большом числе испытаний, значения частоты подвержены малым колебаниям, которые в среднем тем меньше, чем больше число испытаний.

Определение. Число p, около которого колеблется частота, неограниченно приближаясь к нему при увеличении числа испытаний, называется **статистической** вероятностью события A, то есть

$$p = \lim_{n\to\infty} W_n(A), \tag{1.3}$$

Замечание. Часто случайное событие определяют, как событие, которое может произойти или не произойти. Это создает ложное ощущение того, что у любого случайного события есть вероятность (существует ли вероятность у чуда?). Отсюда следует, что теория вероятностей - это наука, которая может всё. Однако это не так. Наука предпочитает эксперименты, результат которых однороден, то есть в результате опыта всегда наступает или не наступает интересующее нас событие. Полной однородности результатов трудно добиться, однако к этому необходимо стремиться. С точки зрения современной теории вероятностей можно изучать только такие случайные события, которые связаны со статистически однородными экспериментами.

Достичь статистическую однородность можно, если предположить **независимость** результатов повторных испытаний. Ясно, что экспериментальная проверка независимости возможна, но никогда не бывает полной.

Например, при проведении опытов, результат которых зависит от времени, проверить его невозможно, если не оставить часть результатов опытов на проверку.

Для того чтобы формула (1.3) имела смысл, необходимо, чтобы любой результат опыта можно было **повторить**.

Подведем итоги. Чтобы вычислить вероятность события статистическим методом необходимо:

а) быть уверенным в том, что вероятность события существует (устойчивость частоты);

б) провести достаточное число повторных независимых испытаний;

в) вычислить частоту;

г) учесть субъективный фактор;

д) за вероятность события A принять либо значение частоты, либо число близкое к нему.

Замечание. Полученные числовые значения вероятностей в формулах (1.2), (1.3) относится к математической статистике, а не к теории вероятностей, поскольку задачей теории вероятностей является вычисление вероятностей одних событий по известным вероятностям других событий.

1.4 Условная вероятность. Формула полной вероятности

Пусть дано вероятностное пространство (Ω, Λ, P) и $A, B \subset \Omega$.

Определение. **Условной** вероятностью, называется число $P\{A/B\}$, определяемое формулой:

$$P\{A/B\} = \frac{P\{A \bigcap B\}}{P\{B\}},\ P\{B\} \neq 0. \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) ниоткуда не следует, она просто соответствует здравому смыслу. Символ $\{A/B\}$ озвучивается как: $\{$событие A произойдет **при условии**, что событие B уже произошло$\}$.

Условная вероятность выражает долю участия события A в реализации события B [6, 12].

Теорема (*умножения вероятностей*). $\forall A_i \subset \Omega$, $i = 1,2,\ldots,n$, имеет место

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = P\{A_i\} \cdot P\{A_2 / A_1\} \cdot \ldots \cdot P\left\{A_n \middle/ \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}.$$

В частности $\forall A, B \subset \Omega$

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B/A\}. \qquad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что события A, B – независимы, если

$$P\{A\} = P\{A/B\}.$$

Замечание. Независимость случайных событий в теории вероятностей относится к её фундаментальным понятиям и во многих случаях определяется практическими соображениями. Понятие независимости событий шире понятия обычной независимости. Принято считать, что события A и B независимы, если они не связаны причинно, либо их связь несущественна. Например, пусть события A и B зависимы, причем $P\{A\} = 0$ $(A \neq \varnothing)$, то $P\{A \cap B\} = 0$ и тем самым $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$, то есть, в вероятностном смысле, события A и B независимы.

Из формул (1.1) и (1.5) независимости событий, приведем свойства, которые сразу следуют из определения:

а) $\forall (A \subset \Omega)) \Rightarrow (A$ и Ω – независимы);

б) $\forall (A \subset \Omega)$ и любого $B \subset \Omega$ такого, что $P\{B\} = 0$ следует, что A и B независимы;

в) если A и B_i независимы, причем $\forall i \neq j$ $(B_i \cap B_j = \varnothing)$, то A и $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ независимы;

г) A независимо с A, если либо $P\{A\} = 0$, либо $P\{A\} = 1$.

Теорема (*полной вероятности*). Пусть имеем вероятностное пространство (Ω, Λ, P) и события $B, A_i \subset \Omega$, $i = 1,2,\ldots,n$. Если 1) события A_i попарно несовместные, то есть $\forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing$, 2) событие $B \subset \Omega$ происходит с одним и только одним из событий A_i, то есть $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_i \bigcap B)$, то имеет место формула **полной** вероятности

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} \cdot P\{B / A_i\},$$

при этом

$$P\{B\} \le \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} \le 1.$$

Доказательство в [12].

1.5 Независимые испытания. Формула Бернулли

Испытания называются независимыми, если их можно повторить сколь угодно раз при одинаковых условиях. Если результат испытания случаен, то результат (события) появляется с вероятностью. Независимые испытания называются **испытаниями Бернулли** [6, 12], если результатом испытания являются два исхода – событие A, появляющиеся каждый раз с неизменной вероятностью $P\{A\} = p$, либо событие $\bar{A}$ - $P\{\overline{A}\} = q$, $p + q = 1$. Для нахождения вероятности $P_n(k)$ - того, что в n испытаниях Бернулли событие A появится ровно k раз, используется формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0,1,\ldots,n, \tag{1.6}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $(k \le n)$; $q = 1 - p$. (1.7)

Построим вероятностное пространство (Ω, Λ, P). Пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_i\}$ - конечное, состоит из точек вида $\omega_i = (0,1,1,0,1,...,0,1)$, интерпретируемых, как n-местный вектор, с координатами 1 – событие A появилось и 0 – появилось событие $\bar{A}$. Всего таких точек $|\Omega| = 2^n$. В самом деле, рассматривая (1.6) как общий член бинома Ньютона и, полагая p=q=1, получим $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Алгебра событий Λ - система множеств (событий), $\Lambda = \{A_k\}$, где $A_k = \{\omega_{i_k}\}$, состоит из всех элементарных событий, содержащих k единиц. Вероятность P – это распределение вероятностей (1.6), где $P\{A_k\} = P_n(k)$. Из (1.6) также следует, что $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$ [12]). В частности, вероятность $P_{n\ge1}(k)$ ($1 \le k \le n$), означающая появление события A хотя бы раз, находится из формулы $P_{\ge1}(k) + P_n(0) = 1$ или

$$P_{\ge1}(k) = 1 - q^n. \tag{1.8}$$

Среди вероятностей $P_n(k)$ существует одна, имеющая наибольшее, значение при некотором $k = k_0$. Это значение k_0 называют **наивероятнейшим числом** появления события A в n испытаниях Бернулли и находят по формуле [5, 12]:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)\cdot p], & \text{если } (n+1)\cdot p \text{ - не целое,} \\ n\cdot p,\ (n+1)\cdot p, & \text{если } (n+1)\cdot p \text{ - целое,} \end{cases}$$

где $[x]$ – целая часть числа x, $x \in R$.

Если p–мало (обычно $p \le 0{,}1$), n велико и $np = \lambda$ не мало и не велико ($\lambda < 20$), то вычисления по формуле Бернулли, заменяют асимптотическим приближением формулой Пуассона:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},\ \lambda = np. \tag{1.9}$$

Формула Пуассона $V_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ [5, 12] табулирована. Для некоторых λ, значения функции приведены в **приложении 1.**

Если $p \to 1/2$ и $n > 10$, то используют приближенную **формулу Муавра-Лапласа:**

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2 / 2)$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varphi(x)$ называется **кривой Гаусса** [5, 12]. Ее значения приведены в **приложении 2.**

Для подсчета вероятности того, что значения $k \in [k_1, k_2]$, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, используют приближенную интегральную формулу Муавра-Лапласа

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$, а $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**, а ее значения для $x \le 0$ приведены в **приложении 3.**

Замечание. Часто вместо функции $\Phi(x)$ используют функцию $\Phi^*(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(t)dt$. Она нечетная, то есть $\Phi^*(x) = -\Phi^*(-x)$. Таблицы достаточно составить для значений $x > 0$ [3].

Замечание. В теории вероятностей формулы Бернулли (1.6) и Пуассона (1.9) важны как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, поскольку понятие независимости испытаний относится к фундаментальным. Не менее важное значение имеют функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$, поскольку являются не только асимптотической оценкой формулы Бернулли, но и составляют основу теории вероятностей [5].

1.6 Случайные величины

В п. 1.5 было построено конечное вероятностное пространство $(\Omega, \Lambda, P) = (\{\omega_i\}, \{A_k\}, \{P_n(k)\})$ для испытаний

Бернулли. Определим ξ как функцию, характеризующую число появлений события A в n испытаниях Бернулли, то есть значения ξ=k, k = 0, 1, …, n. Любая функция $\xi = \varphi(\omega)$ определенная на конечном пространстве элементарных событий $\omega \in \Omega$ или, что то же самое, на алгебре событий, называется **случайной величиной**.

Пример. Рассмотрим формулу Бернулли (1.6). Пусть число испытаний $n \to \infty$, тогда каждая точка пространства $\Omega = \{\omega_i\}$ является бесконечномерным вектором, с координатами из 0 и 1, множество которых совпадает с множеством числовых последовательностей вида $M = \{(0,1,1,0,1,...,0,1,...)\}$, записанных в двоичной системе. Мощность такого множества совпадает с мощностью множества вещественных чисел $|M| = |R|$, то есть имеет M мощность *континуум* [12]. Здесь алгебра событий Λ избыточна, и для сохранения меры [2, 12], вместо алгебры вводится σ-алгебра $\Im$, как естественное обобщение аксиомы 3^* на бесконечный случай. Из множества M строим систему множеств $\Im$, которое называется измеримым множеством [12]. Например, измеримым множеством является борелевское множество $\mathrm{B} = \{-\infty, a) / a \in R\}$ - множество интервалов, включающее изолированные точки [3, 12]. Тем самым построено общее вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$ или аксиоматика Колмогорова.

Случайная величина ξ обобщает понятие случайного события, в том смысле, что, если с любым случайным событием $A \subset \Omega$, связана его вероятность – $P\{A\}$, то со случайной величиной, как функции множества случайных событий, связано распределение вероятностей.

Определение. Пусть даны два измеримых множества $A, B \subset R$. Абстрактная функция φ называется **измеримой** [12], если для нее существует полный прообраз, $A = \varphi^{-1}(B)$.

Определение. Измеримая функция φ, определенная на классе $\Im$ со значениями из R , называется случайной величиной. Далее будем считать, что Ω=R.

Замечание. Оказывается, что не всякое множество, построенное на множестве R, является «хорошим», борелевское множество – хорошее, а множество Кантора «плохое» [12]. По этой причине и вводится σ -алгебра $\Im$.

Если число значений случайной величины ξ конечно или счетно, то она называется **дискретной**. Если число значений случайной величины принадлежит отрезку или даже всей действительной оси, то она называется **непрерывной**[†].

Для произвольной случайной величины ξ, задается функция распределения $F(x)$ - вероятность события $(-\infty < \xi < x)$, $x \in R$, то есть,

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{1.10}$$

В общем случае существование функции распределения определяется существованием интеграла Лебега-Стильтьеса [2,12], заданного на измеримом множестве, например, борелевском.

Определение. Переменная ξ называется случайной величиной, если для неё задана функция распределения (1.10).

С введением случайной величины и ее функции распределения, под вероятностным пространством будем понимать тройку $(\Omega, \Im, F(x))$, где Ω = R, $\mathfrak{I}$ – класс событий (например, Борелевская система множеств), для которого любое подмножество $\mathfrak{I}$ есть событие, $F(x)$ - функция распределения. Введение функции $F(x)$ позволяет обобщить распределение вероятностей P на множество R и даже больше[2, 12].

Свойства функции распределения

Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины ξ, тогда имеют место

1) монотонность:

$$\forall (x_1 \le x_2) \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2),$$

[†] Здесь рассматриваются абсолютно непрерывные функции.

2) непрерывность слева:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0),$$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

5) не более чем счетное число разрывов первого рода.

Любая функция, удовлетворяющая условиям 1) – 5), удовлетворяет и формуле (1.10). Справедливо обратное.

Определение. Функция $\rho(x)$ называется плотностью или плотностью распределения вероятностей, если она – удовлетворяет условиям:

1) $\rho(x) \ge 0$, $\forall x \in R$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$.

Замечание. Если функция распределения есть вероятность и по определению безразмерна, то плотность имеет размерность обратную времени $[1/\textit{вр}]$.

Плотность является непрерывным аналогом закона распределения дискретной случайной величины.

Если для случайной величины задана плотность распределения вероятностей, то она непрерывна и ее функция распределения находится по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt\ .$$

Некоторые важные свойства функции распределения и плотности.

1) $F'(x) = \rho(x)$,

2) $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$,

в частности: $P\{\xi = a\} = F(a+0) - F(a-0)$,

3) $P\{x \le \xi \le x + dx\} = \rho(x)dx$.

Примеры распределений.

1. Распределения дискретных случайных величин.

a). **Вырожденное** распределение $I(A)$ (индикатор события A):

$$I(A)=\begin{cases}1, & \text{если } \omega\in A,\\ 0, & \text{если } \omega\notin A.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a,\\ 1, & \text{если } x>a.\end{cases}$$

b). **Биномиальное** распределение.

Распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P\{\xi=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ k=0,1,\dots,n\ .$$

Функция распределения определяется формулой

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sum\limits_{k<x} C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, & 0<x\le n,\\ 1, & x>n.\end{cases}$$

c). Распределение **Пуассона**.

Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,\dots,\ \lambda>0-const\,.$$

Функция распределения записывается в виде:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sum\limits_{k<x}\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}, & x>0.\end{cases}$$

d). **Геометрическое** распределение.

Пусть случайная величина ξ задана распределением вероятностей

$$P\{\xi = k\} = q \cdot p^k,\ q = 1 - p,\ k = 0,1,\dots ,$$

функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} q \cdot p^k, & x > 0. \end{cases}$$

2. Распределения непрерывных случайных величин.

В практике для непрерывных случайных величин более популярна плотность, чем функция распределения, поскольку она геометрически более наглядна. Часто плотность называют законом распределения. Получить плотность легко, если воспользоваться формулой: $\rho(x) = F'(x)$

а). **Равномерное** на $[a,b]$ распределение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Плотность равномерного распределения (рис. 1.1)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

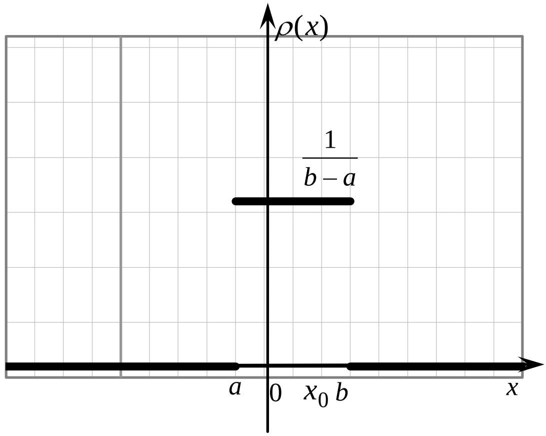

Рис. 1.1. График плотности равномерного распределения.

b). **Показательное** (экспоненциальное) распределение

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}; \; x > 0, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Если x интерпретировать как время, то функцию $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ называют функций **надежности**, а параметр $\lambda > 0$ – **интенсивностью**.

Отсутствие точек перегиба у плотности (рис. 1.2) не позволяет «напрямую» использовать ее для описания «не экспоненциальных» случайных величин.

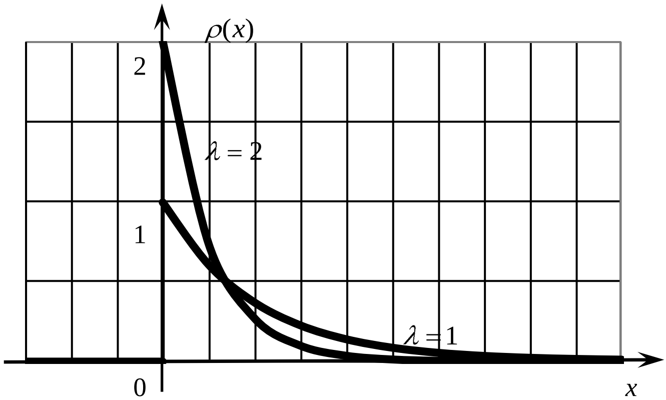

Рис. 1.2 Плотность функции надежности. $\rho(x) = \exp(-\lambda \cdot t)$, $\lambda > 0$.

c). **Нормальное** распределение.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left((y-a)^2 / 2\sigma^2\right) dy, \ \sigma > 0, \ a - const.$$

На рис. 1.3 представлены графики плотности при $\sigma = 0{,}5;\ 1;\ 2$. Точки $a \pm \sigma$ являются точками перегиба. Наличие двух параметров a, σ существенно расширяет область применения нормального распределения в ряду других.

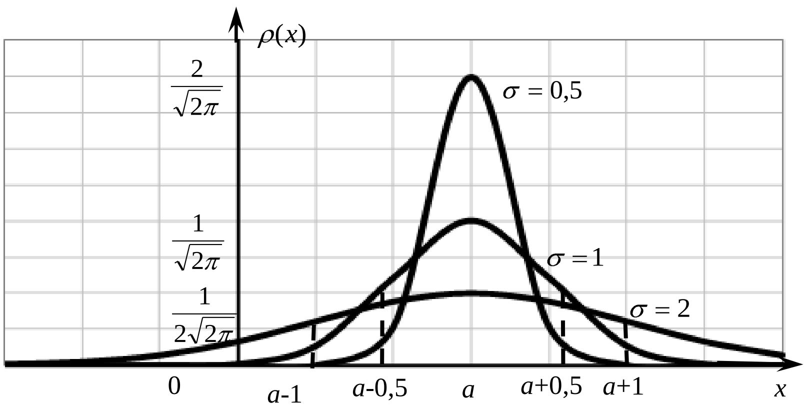

Рис. 1.3 Плотность нормального распределения $\rho_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$.

1.7 Числовые характеристики случайных величин

При рассмотрении функций распределения и плотностей нам встречались постоянные (параметры). Эти постоянные являются не только характеристиками заданных функций, но и имеют важное самостоятельное значение как числовые характеристики случайных величин.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$ и ξ измеримая функция, тогда её математическое ожидание (среднее значение) $M\xi$ определяется интегралом Лебега-Стильтьеса [12]

$$M\xi = \int_{\Omega'} \omega P(d\omega) \qquad (1.11)$$

где Ω' – числовое множество (интервал), на которое взаимно-однозначно отображено пространство элементарных событий Ω.

Рассмотрим частные случаи интеграла (1.11). Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Определение. Средне-взвешенным называется число

$$b = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot a_i \ ,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, в частности, при $\alpha_i = 1/n$, $i = 1, 2, ..., n$, имеем

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$ – среднее арифметическое.

Пусть случайная величина ξ дискретна, тогда ее можно задать законом распределения

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$	$\left(\sum p_i = 1\right)$

p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Определение. Математическим ожиданием (средним значением) $M\xi$ дискретной случайной величины ξ называется её средне - взвешенное значение, то есть

$$M\xi = \sum_i x_i \cdot p_i \ . \qquad (1.12)$$

Математическое ожидание существует, если ряд в правой части (1.12) сходится.

Если случайная величина непрерывна и существует плотность распределения $\rho(x) = F'(x)$, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \rho(x) dx \, . \qquad (1.13)$$

Математическое ожидание существует, если интеграл в (1.13) сходится.

Свойства.

Пусть ξ, η – случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, тогда

1) $M(\alpha + \beta \cdot \xi) = \alpha + \beta \cdot M\xi$,

2) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$,

3) если $a \le \xi \le b$, то $a \le M\xi \le b$,

3^1) $M\xi \le M\,|\,\xi\,|$,

4) если $\xi \ge 0$ и $M\xi = 0$, то $P\{\xi = 0\} = 1$,

5) если ξ, η – независимые, то $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Определение. Отклонением случайной величины ξ, называется случайная величина

$$\eta = \xi - M\xi \, .$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю.

В самом деле, имеем

$$M\eta = M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0 \, . \ \blacktriangledown$$

Геометрически это означает, что среднее значение отклонения всегда находится в начале координат. С механической точки зрения математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести.

Определение. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ называется дисперсией

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 . \tag{1.14}$$

Дисперсия характеризует меру “разброса” около среднего значения.

Преобразуя (1.14), будем иметь,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M^2\xi$$

или

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi , \tag{1.15}$$

что эквивалентно (1.14).

Замечание. Дисперсию можно определить как $\min\limits_a M(\xi - a)^2$.

В самом деле, имеем $D\xi = M\xi^2 + a^2 - 2a \cdot M\xi$, тогда $(M\xi^2 + a^2 - 2a \cdot M\xi)'_a = 2a - 2 \cdot M\xi = 0$, минимум достигается в точке $a = M\xi$. Это означает, что число $a = M\xi$ является наилучшей оценкой в среднем случайной величины.

Для практического применения дисперсии используется среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Замечание. Для среднего квадратичного отклонения не выполняется свойство аддитивности (сложения). Поэтому в теоретических исследованиях используется дисперсия, которая этим свойством обладает. Свойства среднего квадратичного отклонения обычно не рассматривают.

Свойства дисперсии.

Пусть ξ, η – случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, тогда

1) $D\xi \geq 0$,
2) $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{\xi = \alpha\} = 1$,
3) $D(\alpha + \beta \cdot \xi) = \beta^2 \cdot D\xi$,

4) если ξ, η – независимы, то $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$.

Очевидно выполнение свойств $M\xi$ и $D\eta$ для произвольного числа случайных величин.

Моменты.

Моменты относятся к основным числовым характеристикам распределения случайной величины.

Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi$.

Определение. **Начальным** моментом ν_k порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание случайной величины ξ^k: $\nu_k = M(\xi^k)$, $k \in N$, и вычисляется по формуле

$$\text{а)}\ \nu_k = \sum_i (x_i)^k \cdot p_i\ , i \in N, \qquad (2.13)$$

если ξ – дискретная;

$$\text{б)}\ \nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \rho(x) dx\ , \qquad (2.14)$$

если ξ – непрерывная случайная величина.

Начальные моменты порядка k существуют, если их правые части в (2.12) и (2.13) имеют смысл.

Математическое ожидание есть начальный момент первого порядка $M\xi = \nu_1$.

Определение. **Центральным** моментом μ_k порядка k случайной величины ξ, называется математическое ожидание k – ой степени её отклонения - $(\xi - M\xi)^k$,то есть

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k,\ k \in N\ ,$$

$$\text{а)}\ \mu_k = \sum_i (x_i - M\xi)^k \cdot p_i\ , i \in N, \qquad (2.15)$$

если ξ - дискретная,

$$\text{б)}\ \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k \cdot \rho(x)dx\,. \qquad (2.16)$$

если ξ - непрерывная.

Очевидно, что, если существует момент порядка *k*, то существуют все моменты низшего порядка.

В силу линейности математического ожидания центральные моменты могут быть выражены через начальные. Приведем часто используемые из них: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$, $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$, $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$.

Практическая интерпретация некоторых моментов

$\nu_1 = M\xi$ - относительное расположение плотности на числовой оси (абсциссы центра тяжести плотности); $\mu_1 = 0$ - сдвиг абсциссы центра тяжести плотности в начало координат; $\mu_2 = D\xi$ - дисперсия; μ_3 - характеристика отличия унимодальной плотности от симметрии (μ_3 / σ_3 - коэффициент асимметрии); μ_4 - характеристика островершинности унимодальной плотности ($\mu_4 / \sigma^4 - 3$ - коэффициент эксцесса).

Замечание. Рассматриваются также нецелые значения *k* моментов порядка *k*.

Относительно случайных величин ξ, η можно считать, что они могут быть независимы, зависимы функционально $\eta = f(\xi)$, зависимы через случайную зависимость. Качественную (линейную) зависимость между случайными величинами ξ, η обычно пытаются найти с помощью коэффициента **корреляции.**

Определение. Случайная величина ξ называется нормированной, если $M\xi = 0$, $D\xi = 1$; любую случайную величину можно нормировать преобразованием

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}. \qquad (1.16)$$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ, η называется число

$$r(\xi,\eta) = M(\xi^* \cdot \eta^*),$$

где $\xi^* = \dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$, $\eta^* = \dfrac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}$.

Свойства.

1). $|r(\xi,\eta)| \le 1$.

2). Если ξ, η независимые, то $r(\xi,\eta) = 0$.

Определение. Если $r(\xi,\eta) = 0$, то случайные величины ξ, η называются некоррелированными.

3). $|r(\xi,\eta)| = 1$ тогда и только тогда, когда $\eta = \alpha + \beta \cdot \xi$, то есть ξ, η линейно зависимы.

Закон больших чисел

Пусть случайная величина $\xi \ge 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\xi \ge \varepsilon\} \le \frac{M\xi^k}{\varepsilon^k}, \; k \in N. \qquad (1.17)$$

Формула (1.17) называется неравенством Маркова.

Из (1.17) следует, если случайная величина ξ имеет дисперсию, то

$$P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \text{ или}$$

$$P\{|\xi - M\xi| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}, \; \forall \varepsilon > 0. \qquad (1.18)$$

Неравенство (1.18) называется неравенством Чебышева.

С помощью неравенства Чебышева можно оценивать отклонения случайной величины ξ без знания функции распределения, а имея лишь $M\xi$, $D\xi$.

Теорема (закон больших чисел). Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – последовательность независимых случайных величин с дисперсиями $D\xi_i$, $i \in N$, ограниченными в совокупности, тогда

$$\forall \varepsilon > 0, P\left\{\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} M\xi_i\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \quad (1.19)$$

Физический смысл закона больших чисел состоит в следующем: так как математическое ожидание для любой случайной величины есть число, то среднее арифметическое математических ожиданий тоже число и из формулы (1.19) следует, что совокупное действие большого числа случайных величин ведет себя не случайно. Последнее означает, что при определенных условиях, чем больше информации мы имеем об объекте, тем точнее мы можем предсказать его поведение, то есть труды добросовестного исследователя не пропадут даром.

2 Элементы математической статистики

Статистика (*status* – город, состояние дел) включает разделы:

1) **сбор** сведений (результатов эксперимента) о свойствах отдельных элементов массовых явлений;

2) **исследование** этих сведений, выявление закономерностей;

3) разработка **приемов** и **методов** исследования результатов эксперимента.

Математическая статистика, в основном, имеет отношение к третьей части, в которой будем изучать: а) оценки неизвестных функций распределения (распределения вероятностей, плотности), б) оценки неизвестных параметров распределения, в) способы проверки статистических гипотез.

2.1 Оценка функции распределения

При проведении случайных экспериментов (то есть независимых экспериментов, результатом которых являются события, появляющиеся с вероятностью), используют приемы и методы, которые предполагают статистическую устойчивость результата. Чем больше экспериментов, тем лучше. Однако устойчивость всегда связана с бесконечностью, что на практике невозможно. Поэтому по результатам повторных экспериментов, мы делаем оценки. По этой же причине, даже если исходное множество бесконечно, в нашей теории выборочного метода, оно будет считаться конечным. Зато в дальнейших исследованиях появляется возможность по известной части исходного множества делать выводы относительно всего множества. Пусть имеем сколь угодно большое, но конечное **числовое** множество *Г*, все элементы которого различны. Эксперимент состоит в простом случайном выборе (то есть выборе с возвращением) элемента из множества *Г*. Множество *Г* называется **генеральной** совокупностью (population), а результат эксперимента, повторенного n раз, – числовой выборкой или просто **выборкой** – это фундамент математической статистики, аналогичный конечному пространству Ω элементарных событий из теории вероятностей.

Для того чтобы иметь представление о целом (то есть о генеральной совокупности) по его части, мы должны уверить себя в том, что эта часть должна быть выбрана так, чтобы отражала все основные свойства целого, то есть была **репрезентативной**. Если мы заранее не знаем свойств целого, то считаем, что каждый элемент генеральной совокупности имеет одинаковую возможность попасть в выборку (простой случайный выбор).

Таким образом, исходным пунктом статистического исследования является выбор элементов из генеральной совокупности. Результаты n экспериментов (выбора), представленных числами, называются **выборкой** (повторной) объема n,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2.1}$$

Упорядочим выборку (2.1) по неубыванию элементов. Полученная совокупность

$$x'_1 \le x'_2 \le \ldots \le x'_n, \tag{2.2}$$

называется **вариационным** рядом.

Пусть в выборке (2.2) k различных элементов x_{i_r} и m_r - число повторов, $r = 1, 2, ..., k$. Выберем по одному из них и расположим в порядке возрастания $x_{i_1} < x_{i_2} < ..x_{i_r} < ... < x_{i_k}$. Элементы x_{i_r}, называются **признаками (вариантами)**, а число повторов m_r - **абсолютной** частотой признака x_{i_r}.

Размахом выборки называется число $R = \left| x_{i_k} - x_{i_1} \right|$.

Выборку (2.2) можно представить в виде простой статистической таблицы (табл. 2.1).

Таблица 2.1

x	x_{i_1}	x_{i_2}	$\dots$	x_{i_k}
m	m_1	m_2	$\dots$	m_k

$$\left(\sum_{r=1}^{k} m_r = n \right)$$

Как правило, табл. 2.1 составляется для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин используется интервальная статистическая таблица (табл. 2.2). Для этого весь диапазон значений случайной величины ξ разбивают на s<k интервалов (не обязательно равной длины).

Таблица 2.2

$[x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$	$[x_{i_1}, x_{i_2})$	$[x_{i_2}, x_{i_3})$	$\dots$	$[x_{i_{s-1}}, x_{i_s})$	$[x_{i_s}, x_{i_{+1}})$
W_r	m_1 / n	m_2 / n	$\dots$	m_{s-1} / n	m_s / n

Величина $W_r = \dfrac{m_r}{n}$ называется относительной частотой; очевидно, что $\sum_{r=1}^{s} W_r = 1$.

Если выборка (2.1) достаточно большого объема и репрезентативна, то для исследуемой случайной величины ξ можно построить **эмпирическую** функцию распределения

$$\tilde{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x < x_{\min}, \\ \dfrac{r}{n}, & \text{для,} \quad x_{\min} \le x < x_{\max}, \\ 1, & \text{для,} \quad x_{\max} \le x \end{cases}, \tag{2.3}$$

$r = \sum\limits_{x_i < x} m_i$, m_i – абсолютная частота $x_i < x$, $x_{\min} = x'_1$, $x_{\max} = x'_n$.

Если случайная величина ξ – непрерывна, то эмпирическая функция может быть определена как

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{x < x_{i_r}} W_r \ . \tag{2.4}$$

Ясно, что $\tilde{F}_n(x_{\max} + \varepsilon) = \sum\limits_{r=1}^{k} W_r = 1$, $\varepsilon > 0$.

Для оценки адекватности эмпирической функции распределения $\tilde{F}_n(x)$ теоретической – $F(x)$, используют критерий Колмогорова А.Н. [5].

Теорема. Если функция $F(x)$ непрерывна, то при $n \to \infty$

$$P\left\{ D_n < \frac{z}{\sqrt{n}} \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} k(z),$$

где $D_n = \max \left| \tilde{F}_n(x) - F(x) \right|$,

$$k(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \le 0, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \cdot \exp(-2k^2 \cdot z^2), & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

Функция $k(z)$ называется функцией Колмогорова [5, 12]. Её значения табулированы и приведены в **приложении 4**.

Пусть требуется проверить гипотезу H_0 о том, что случайная величина ξ является **непрерывной** и имеет функцию $F(x)$ своей функцией распределения. Проведем n независимых испытаний и построим эмпирическую функцию $\tilde{F}_n(x)$. Согласно теореме Гливенко [5], $\tilde{F}_n(x)$ есть приближение к функции $F(x)$.

Величина D_n есть мера отклонения $\tilde{F}_n(x)$ от $F(x)$. Пусть $\alpha > 0$ и z_0 такое, что $P\{D_n \ge \lambda_0\} = \alpha$, где $\lambda_0 \cdot \sqrt{n} = z_0$. Если можно считать, что в единичном испытании практически невозможно произойти событию, вероятность которого равна α (обычно, $\alpha \le 0{,}2$), то мы приходим к следующему критерию проверки гипотезы H_0 (Критерий Колмогорова).

Выдвигаем гипотезу H_0: $F(x)$ – является функцией распределения исследуемой случайной величины ξ. Далее, последовательно, по шагам:
1) находим $D_n = \max\limits_x |\tilde{F}_n(x) - F(x)|$, 2) вычисляем $z_0 = D_n \cdot \sqrt{n}$, 3) по таблице (приложение 4) находим $k(z_0) = \alpha_0$, 4) если α_0 достаточно велико ($\alpha_0 > \alpha$), то гипотезу H_0 принимаем (то есть, она не противоречит опытным данным).

Замечание. Критерий Колмогорова обладает наглядностью и простотой, однако, для его применения необходимо знать не только вид теоретической функции распределения, но и значения всех, входящих в неё, параметров. Кроме того, его применение ограничено непрерывными распределениями.

Другим важным критерием проверки гипотезы, о соответствии эмпирической функции распределения теоретической, является **критерий** χ^2 (Пирсона).

Пусть имеем табл. 2.2. Требуется проверить согласование экспериментальных данных с гипотезой о том, что случайная величина ξ имеет теоретическое распределение $F(x)$.

Находим теоретические вероятности попадания случайной величины ξ в каждый интервал из табл. 2.2:

$$p_1, p_2, \dots, p_k .$$

Меру расхождения χ^2 вычисляем по формуле Пирсона:

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(W_i - p_i)^2}{p_i}.$$

Распределение χ^2 зависит от объема выборки n и числа степеней свободы r, $\chi^2 = \chi^2(n, r)$. Соответствующие таблицы значений распределения χ^2 приведены в **приложении 5**.

Во всех случаях имеем одно ограничение: $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$ значит, число степеней свободы $r = n - 1$. Если в теоретическом распределении присутствует один параметр (например, $a = M\xi$) и его значение известно, то число степеней свободы $r = n - 2$. Если два параметра, (например, $a = M\xi$, $\sigma = \sqrt{D\xi}$), то число степеней свободы $r = n - 3$ и т. д.

Замечание. Число степеней свободы может быть уменьшено на единицу в случае, если значение параметра теоретического распределения получено из другой выборки.

Схема применения критерия χ^2: 1) определяем число степеней свободы: $r = n - s$ (s – число ограничений); 2) вычисляем меру расхождения: $\chi_0^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(W_i - p_i)^2}{p_i}$; 3) по числу степеней свободы, находим наиболее близкое значение $\chi^2(r, p) > \chi_0^2$ (**приложение** 5); 4) если табличному числу $\chi^2(r, p)$ соответствует вероятность p достаточно большая (>0,2), то гипотеза принимается как непротиворечащая опытным данным.

Для применения критерия Пирсона, желательно иметь достаточно большой объем выборки, да и его использование, по сравнению с критерием Колмогорова, громоздко. Тем не менее, критерий Пирсона обладает тем преимуществом, что, во-первых, он применим к любым видам распределения и, во-вторых, числовые значения параметров теоретической функции распределения можно получить из имеющейся выборки, то есть заранее нам достаточно знать общий вид теоретической функции распределения. Критерий Колмогорова в этом смысле более «узкий». Желательно, при проверке гипотезы, о соответствии теоретической функции распределения эмпирическим данным применять **оба** критерия.

Задача нахождения теоретической функции распределения требует проведения достаточно большого числа опытов, а также, по крайней мере, знания общего вида искомой функции. Такая ситуация далеко не всегда встречается на практике.

Чаще всего имеется выборка относительно малого объема или вид теоретической функции распределения неизвестен. В этом случае обычно вычисляют числовые характеристики случайных величин (моменты, семиинварианты, вероятности и т.д.).

2.2 Точечные оценки неизвестных параметров законов распределения

Здесь мы рассматриваем задачи определения неизвестных параметров законов распределения случайных величин, в условиях относительно малых объемов эмпирических данных. Ясно, что каким бы не был объем выборки, значение параметра, который мы оцениваем, будет приближенно. Это приближение называется **оценкой** параметра. Для того чтобы оценка была наилучшей, требуется иметь о ней наиболее полное представление.

Пусть случайная величина ξ распределена по закону, с неизвестным параметром a. Требуется найти для него подходящую оценку $\tilde{a}$ по выборке (2.1): $x_1, x_2, ..., x_n$.

При выборе условий, налагаемых на оценку $\tilde{a}$ неизвестного параметра a, прежде мы должны построить математическую модель эксперимента. Под этим мы понимаем следующее:

1) выборка является n–мерным случайным вектором

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n),$$

где случайные величины ξ_i, $i = 1,2,...,n$, определены на одной и той же генеральной совокупности и имеют, соответственно, одну и ту же функцию распределения и, тем самым, одни и те же параметры;

2) выборка репрезентативна, то есть любой элемент генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в выборку.

Таким образом, оценка $\tilde{a}$ параметра a есть n–мерная неслучайная функция n случайных аргументов ξ_i

$$\tilde{a} = \tilde{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

Принято считать, что оценка $\tilde{a}$ должна удовлетворять условиям:

а) **несмещенности**:

$$M(\tilde{a}) = a ,$$

практически это означает, что систематические ошибки отсутствуют;

б) **эффективности:**

оценка $\tilde{a}$ более эффективна чем $\tilde{\tilde{a}}$, если

$$M(\tilde{a} - a)^2 < M(\tilde{\tilde{a}} - a)^2 ,$$

эффективность оценки $\tilde{a}$ означает, что её дисперсия меньше, чем дисперсия других оценок;

в) **состоятельности:**

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = a , \qquad (2.5)$$

состоятельность означает, что для оценки $\tilde{a}$ выполняется закон больших чисел (обычно это теорема Чебышева или её следствия).

Замечание. На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям по соображениям объективного или экономического характера. Тем не менее, желательно всегда пытаться исследовать оценку на достоверность[12].

Итак, пусть имеем выборку (2.1). Для оценки математического ожидания $a = M\xi$ случайной величины ξ, всем условиям удовлетворяет средняя арифметическая

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (2.6)$$

Для оценки дисперсии, в условиях выборок относительно большого объема, используется выборочная дисперсия,

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\xi})^2 \qquad (2.7)$$

или

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{\xi}^2 . \qquad (2.8)$$

Выборочная дисперсия не удовлетворяет условию несмещенности.

Всем трем условиям удовлетворяет исправленная дисперсия [12]

$$\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

или

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\xi})^2 . \qquad (2.9)$$

Ясно, что если выборка имеет достаточный объем (n>50), то использовать можно как формулу (2.7) так и (2.9).

Для оценки среднеквадратичного отклонения наилучшей оценки не найдено. Обычно рассматривают

$$s = \sqrt{s^2} \ \text{ или } \ \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} \ .$$

Для вычисления моментов более высокого порядка, можно использовать статистические аналоги, но они, с увеличением порядка, снижают точность оценки и, в большей мере, являются качественными оценками, нежели количественными.

Таким образом, в условиях ограниченного объема выборки, мы имеем методику оценки неизвестных параметров распределения. Такая оценка называется **точечной.**

2.3 Доверительный интервал

При применении критерия Колмогорова значения всех параметров теоретической функции распределения должны быть известны. При применении критерия χ^2, для той же функции, параметры, если они неизвестны, оцениваются приближенно (например, для экспоненциального распределения, через среднее арифметическое). Естественно возникает вопрос, в каких интервалах могут находиться оцениваемые параметры, чтобы гипотеза, о соответствии эмпирической функции распределения теоретической, была принята? Кроме того, если мы оцениваем только параметры, не зная функции распределения, нахождение допустимого интервала важно, например, для оценки ошибки принятого точечного значения параметра.

Мы приходим к задаче нахождения случайного интервала, покрывающего теоретический параметр. Прежде всего, на действительной прямой мы должны найти точку, являющуюся серединой случайного интервала. В идеале это значение теоретического параметра, но мы его не знаем. Тогда берут такую точечную оценку $\tilde{a}$, которая была бы наилучшим приближением к теоретическому параметру a (например, для оценки математического ожидания взять среднее арифметическое). Затем находят границы интервала $(\tilde{a}-\varepsilon, \tilde{a}+\varepsilon)$. Значения ε также случайны, следовательно, мы должны задать γ – вероятность того, что наш случайный интервал покрывает теоретический параметр a. Итак, имеем уравнение

$$P\{|\tilde{a}-a|<\varepsilon_\gamma\}=\gamma. \qquad (2.10)$$

Задача решалась бы просто, если бы мы знали закон распределения оценки $\tilde{a}$, который на самом деле неизвестен. Однако если оценивается математическое ожидание и дисперсия, а число опытов $n>20$ (что условно), то для них, в силу центральной предельной теоремы [5], считают закон распределения, средней арифметической $\bar{\xi}$ и дисперсии $\tilde{s}^2$, нормальным, тогда имеем из (2.10)

$$P\{|\bar{\xi} - M\xi| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma .$$

Так как $\bar{\xi}$ распределена нормально, то

$$\gamma = 1 - 2 \cdot \Phi\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{\tilde{s}}\right), \qquad (2.11)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2) dt$.

В уравнении (2.11) одно неизвестное ε_γ, которое легко найти. Тогда доверительный интервал будет иметь вид.

$$\bar{\xi} - \varepsilon_\gamma < M\xi < \bar{\xi} + \varepsilon_\gamma . \qquad (2.12)$$

Аналогичным образом можно получить доверительный интервал для дисперсии:

$$\tilde{s}^2 - \varepsilon_\gamma < D\xi < \tilde{s}^2 + \varepsilon_\gamma . \qquad (2.13)$$

В целях удобства вычисления доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии, вместо (2.12) и (2.13), рассматривают интервалы:

$$\text{а) } \bar{\xi} - t_\gamma \cdot \sigma_{\bar{\xi}} < M\xi < \bar{\xi} + t_\gamma \cdot \sigma_{\bar{\xi}} , \qquad (2.14)$$

где $t_\gamma = \arg\Phi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$, а $\sigma_{\bar{\xi}} = \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} = \frac{\tilde{s}}{\sqrt{n}}$ ($\arg x$ – аргумент x);

$$\text{б) } \tilde{s}^2 - t_\gamma \cdot \sigma_{\tilde{s}^2} < D\xi < \tilde{s}^2 + t_\gamma \cdot \sigma_{\tilde{s}^2} , \qquad (2.15)$$

где $\sigma_{\tilde{s}^2} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \tilde{s}$.

Итак, если число испытаний велико ($n > 20$), то для оценки математического ожидания и дисперсии доверительные интервалы находятся по формулам (2.12) и (2.13) или (2.14) и (2.15), с удовлетворительной для практики точностью.

Более точные методы **требуют**, для построения доверительных интервалов, знать **заранее** вид закона распределения исследуемой случайной величины ξ.

Предположение о нормальности закона распределения произвольной случайной величины далеко не всегда оправдано даже при больших выборках. В некоторых случаях удается построить доверительный интервал, относительно точно, если заменить закон распределения случайной величины ξ, содержащий неизвестные параметры на достаточно близкий к ней закон распределения, этих параметров не содержащий. Мы рассмотрим здесь случай только нормально распределенной случайной величины с неизвестными параметрами a и σ. Для этого потребуются следующие распределения:

1). **Распределение Стьюдента** (Госсетта). Плотность распределения Стьюдента (или t–распределения) с $(n-1)$ степенью свободы:

$$S_{n-1}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi\cdot(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},\ t\in R. \quad (2.16)$$

Доказано, что, если ξ нормально распределенная случайная величина, то случайная величина $\eta=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{\xi}-M\xi}{\sqrt{\tilde{s}^2}}$ подчинена закону (2.16).

2). **Распределение χ^2.** Плотность распределения χ^2 с $(n-1)$ степенью свободы, имеет вид:

$$\nu_{n-1}(\chi^2)=\begin{cases}0, & \chi^2\le 0,\\ \left(2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1}\cdot(\chi^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \chi^2>0.\end{cases} \quad (2.17)$$

Данное распределение имеет случайная величина $\eta=\frac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{D\xi}$, где $\tilde{s}^2$ исправленная дисперсия нормально распределенной случайной величины ξ.

Легко заметить, что распределение Стьюдента (2.16) можно использовать при построении доверительного интервала для математического ожидания, а распределение χ^2 (2.17) при построении доверительного интервала дисперсии.

В самом деле, пусть доверительные интервалы $M\xi$ и $D\xi$ определяются доверительной вероятностью β.

Построим доверительный интервал для $M\xi$. Возьмем его симметричным относительно $\bar{\xi}$, взяв ε_β за половину длины интервала. Ясно, что величина ε_β удовлетворяет равенству

$$P\{|\bar{\xi} - M\xi| < \varepsilon_\beta\} = \beta.$$

Переходя от случайной величины $\bar{\xi}$ к случайной величине η, распределенной по закону Стьюдента, получим

$$P\{|\eta| < t_\beta\} = \beta,$$

где $t_\beta = \sqrt{n} \cdot \varepsilon_\beta / \sqrt{\tilde{s}^2}$.

Значение t_β найдем из условия (с учетом четности функции $S_{n-1}(t)$):

$$2 \cdot \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt = \beta. \tag{2.18}$$

При различных значениях доверительной вероятности β и числе испытаний n, значения t_β табулированы (**приложение 6**). Таким образом, из условий:

$$|\bar{\xi} - M\xi| < \varepsilon \text{ и } t_\beta = \sqrt{n} \cdot \varepsilon_\beta / \sqrt{\tilde{s}^2},$$

получаем доверительный интервал для оценки математического ожидания случайной величины ξ:

$$\bar{\xi} - t_\beta \cdot \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} < M\xi < \bar{\xi} + t_\beta \cdot \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}}. \tag{2.19}$$

Для оценки дисперсии, рассмотрим распределение χ^2 для случайной величины $\eta = \dfrac{(n-1)\cdot \tilde{s}^2}{D\xi}$. Зная закон распределения

η, можно найти доверительный интервал, в который случайная величина η попадает с вероятностью β.

Плотность $\nu_{n-1}(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.1.

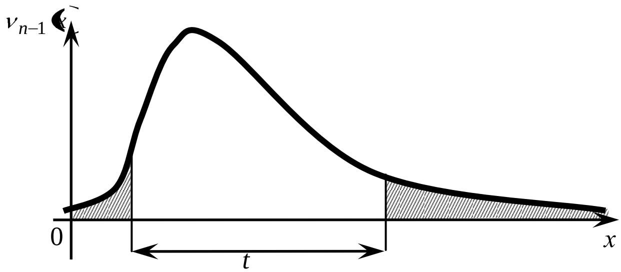

Рис. 2.1 Плотность χ^2 – распределения

Выбрать интервал t_β так, как для оценки математического ожидания мы не можем, поскольку распределение χ^2 не симметрично. Будем выбирать интервал t_β таким образом, чтобы вероятности выхода случайной величины η за пределы интервала влево и вправо (заштрихованные области на рис. 2.1) были одинаковы и равны

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}.$$

Построение интервала с таким свойством сводится, очевидно, к выполнению условия

$$P\{\eta > \chi^2\} = p, \tag{2.20}$$

где случайная величина η имеет распределение χ^2 с r степенями свободы. При числе степеней свободы $r = n-1$, находим два значения χ^2 из уравнения:

$$\int_0^{\chi^2} \nu_{n-1}(x)dx = p,$$

а) для левого конца интервала (рис. 2.1), при $p = \alpha / 2$, имеем $\chi^2 = \chi_1{}^2$;

б) для правого конца интервала, при $p = 1 - \alpha / 2$, имеем $\chi^2 = \chi_2{}^2$.

Значения χ^2 табулированы (**приложение 5**).

Из (2.17), учитывая, что $\eta = \dfrac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{D\xi}$ и (2.20), получаем:

а) для левого конца $\eta = \dfrac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{D\xi} < \chi_1{}^2$;

б) для правого конца $\eta = \dfrac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{D\xi} > \chi_2{}^2$.

Окончательно, доверительный интервал для оценки дисперсии имеет вид

$$\frac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{\chi_1{}^2} < D\xi < \frac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{\chi_2{}^2}. \qquad (2.21)$$

2.4 Проверка статистической однородности

Теория вероятностей изучает такие события, результат которых устойчив, или, что, то же самое, статистически однороден. Как определить, достигли мы желаемого результата, после проведенной серии экспериментов, или нет? Следует ли провести еще одну серию, чтобы закрепить свои предположения? Ясно, что исчерпывающего ответа на эти вопросы получить нельзя.

Однако некоторые оценки сделать можно, если использовать центральную предельную теорему [5], суть которой в следующем: если даны n случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию (со сравнимыми средними), то их сумма имеет распределение близкое к нормальному (то есть, ведет себя не случайно).

Пусть имеем вероятностное пространство $(\Omega, F_\xi(x))$, в котором случайная величина ξ нормально распределена

($M\xi = 0$, $D\xi = 1$) и задан n-мерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ определены на том же вероятностном пространстве, что и ξ, то есть, имеют одну и туже функцию распределения $F_\xi(x)$.

Поставим задачу. Проведено две серии экспериментов: в первой серии из n_1 экспериментов, событие A появилось μ_1 раз, а во второй серии, из n_2 экспериментов, событие A появилось μ_2 раз. Можно ли предполагать, что вероятность события A одинакова в обоих случаях?

Пусть в первой серии $P\{A\} = p_1$, а во второй $P\{A\} = p_2$. Верна ли гипотеза $H_0: \ p_1 = p_2$?

Для ответа на вопрос, необходимо чтобы разность частот $\delta = \dfrac{\mu_1}{n_1} - \dfrac{\mu_2}{n_2}$, была достаточно мала, тогда ее можно объяснить случайными причинами. Если ошибка δ в самом деле мала, то естественно предположить, что случайные величины μ_1 и μ_2 распределены нормально, то есть при $p_1 = p_2$, будем иметь $M\delta = M\left(\dfrac{\mu_1}{n_1}\right) - M\left(\dfrac{\mu_2}{n_2}\right) = 0$.

Если считать, что серии опытов независимы, то δ имеет распределение близкое к нормальному, у которого $M\delta = 0$ и $M\delta = D\left(\dfrac{\mu_1}{n_1}\right) + D\left(\dfrac{\mu_2}{n_2}\right)$.

Если значение $M\delta$ известно, то, по таблице для нормального распределения, можно получить ответ на вопрос.

Серии опытов, в силу предположения, будем считать сериями испытаний Бернулли, тогда, если $p_1 = p_2$, то

$$D\left(\frac{\mu_1}{n_1}\right) + D\left(\frac{\mu_2}{n_2}\right) = \frac{1}{n_1^{\,2}} \cdot D\mu_1 + \frac{1}{n_2^{\,2}} \cdot D\mu_2 = \frac{p_1 \cdot (1 - p_1) \cdot n_1}{n_1^{\,2}} +$$

$$+ \frac{p_2 \cdot (1 - p_2) \cdot n_2}{n_2^{\,2}} = p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Значение p неизвестно, но, используя данные эксперимента, можно заменить p на

$$\tilde{p} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{n_1 + n_2}$$

(так как это лучшее, что можно предложить в данной ситуации), тогда

$$\xi = \delta : \sqrt{\tilde{p} \cdot (1 - \tilde{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}\,. \qquad (2.22)$$

Случайная величина ξ нормирована и имеет приблизительно нормальное распределение, из которого следует, что значения $|\xi| > 3$ маловероятны, рис. 2.2.

В самом деле, например, для $\xi = -1{,}96$, по таблице для $\Phi(x)$ находим $\Phi(-1{,}96) = 0{,}0250$, а для $\xi = 1{,}96$, значение $\Phi(1{,}96) = 1 - 0{,}0250 = 0{,}9750$ (рис. 2.2).

Представим сказанное в терминах теории вероятностей, то есть, определим область принятия гипотезы H_0.

Заранее зададим малое γ (например, $\gamma = 0{,}05$), означающее, что событию с такой вероятностью произойти практически невозможно. Число γ называется **уровнем значимости**. Используются значения $\gamma \div$ 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,001.

Пусть значение случайной величины ξ, в данной серии испытаний, оказалось равным $\xi = \varepsilon$. Если $\varepsilon < 0$, то находим $P\{\xi < \varepsilon\} = \Phi(\varepsilon)$; если $\varepsilon > 0$, то имеем $P\{\xi > \varepsilon\} = 1 - \Phi(\varepsilon)$.

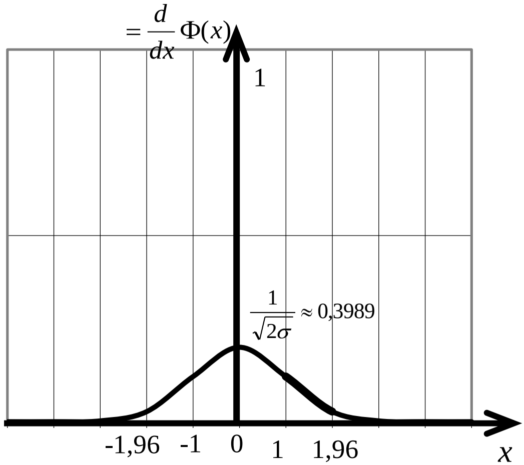

Рис. 2.2 Плотность нормированного нормального распределения

Объединяя, значения вероятностей, получаем $P\{|\xi| > \varepsilon\} = 2\Phi(-\varepsilon)$ (в нашем случае, $P\{|\xi| > \varepsilon\} = 2 \cdot 0{,}025 = 0{,}05$, рис. 2.2). При $2\Phi(-\varepsilon) < \gamma$, гипотеза H_0 отвергается, иначе – данные выборки не противоречат гипотезе H_0 и ее нет оснований не принять, если отсутствует субъективный фактор.

Замечание. Так как, например, как в нашем случае, при $\Phi(\varepsilon) = 0{,}0250$ следует, что $\varepsilon = -1{,}96$, то область принятия гипотезы H_0, есть $\{-1{,}96 < \varepsilon < 1{,}96\}$.

Если значение вероятности равно или близко к γ, то принять гипотезу H_0 или отвергнуть, зависит от изучаемого объекта и субъективного фактора.

3 Основы теории случайных процессов

Под случайной функцией понимается изменение во времени (или эквивалентному ему параметру, например, температуры) состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями. Теория случайных процессов является частью теории случайных функций.

3.1 Основные понятия

Напомним, что случайная величина ξ – измеримая функция определенная на пространстве элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, то есть $\xi = \varphi(\omega)$, или, что то же самое, переменная ξ – случайная, если для неё задана функция распределения $F(x)$.

Если случайную величину рассматривать в динамике её развития, как функцию времени, то мы приходим к понятию **случайного процесса**.

Пример. Пусть случайная величина ξ принимает два значения, в соответствие табл. 3.1

Таблица 3.1

ξ	0	1
p	q	p

$(p + q = 1)$.

Если ξ интерпретировать как гибель бактерии, то вероятность *p*, ее гибели, будет зависеть от температуры, то есть, имеем закон

ξ	0	1
p	$p(t)$	$q(t)$

$(p(t) + q(t) = 1,\ \forall t \in [0, T])$

Полученный закон представляет собой **случайный** процесс, в котором значение случайной величины ξ не зависит от времени *t*, а вероятность зависит.

Пример. Рассматривается функционирование системы *S*, заданной графом, представленным на рис.3.1.

В момент включения, система S из состояния C_0 с вероятностью p перейдет в состояние C_1 и с вероятностью q перейдет в состояние C_2.

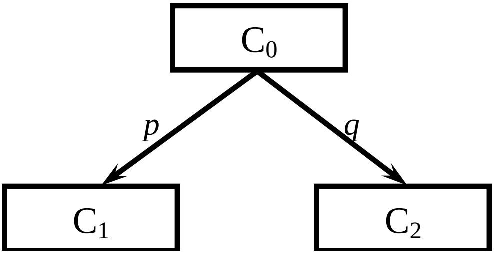

Рис. 3.1

Дальнейшее её функционирование задается табл. 3.2

Таблица 3.2

$\xi(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
p	p	q

Здесь значение случайной величины является функцией времени. Это так же случайный процесс.

Вообще, процесс, протекающий в любой системе *S*, случайный, если он представляет собой случайный переход системы из состояния в состояние, в зависимости от времени. Конечно, состояние системы *S* обычно характеризуется несколькими переменными, например, температурой, давлением, скоростью и др. Их можно отнести к характеристикам случайного процесса, и все они, в конечном счете, будут зависеть от времени.

Определение. **Случайным процессом** (**с.п.**) $\xi(t)$ называется функция двух переменных, одно из которых время

$$\xi(t)=\varphi(\omega,t),\ \omega\in\Omega,\ \ t\in T\ ,\ \varphi(t)\in R\,, \tag{3.1}$$

где $\{\omega\}=\Omega$ – пространство элементарных событий, $T\in[0,\infty)$ – множество значений аргумента *t*, *R* – множество значений с.п. $\xi(t)$.

При фиксированном значении $t=t_0$ $\xi(t_0)=\varphi(\omega,t_0)$ является случайной величиной. При фиксированном

$\omega = \omega_0 \in \Omega$, функция $\xi(t) = \varphi(\omega_0, t)$ является неслучайной и называется **траекторией с.п.** $\xi(t)$. **С.п.** называется непосредственно **заданным**, если каждый исход эксперимента ω описывается соответствующей траекторией в пространстве всех функций на множестве *T* со значениями в *G*.

В зависимости от мощности множества *T* значений аргумента *t*, **с.п.** можно разделить на четыре класса:

1) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;
2) процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем;
3) процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем;
4) процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Как и для случайной величины ξ, для **с.п.** $\xi(t)$ введем **функцию распределения с.п.**

$$F(t,x) = P\{\xi(t) < x\}, \tag{3.2}$$

где $(t \times x) \in (T \times R)$.

Функция (3.2) называется одномерным законом распределения **с.п.** $\xi(t)$, для каждого фиксированного *t*.

Пусть имеем **с.п.** $\xi(t) = \varphi(\omega, t)$. При любом допустимом значении $t = t_1$ случайная величина $\xi(t_1) = \varphi(\omega, t_1)$ имеет свою функцию распределения $F_1(t) = F(t, t_1)$. Будем говорить, что в этом случае имеем **сечение с.п.** При фиксированном $\omega_1 \in \Omega$, неслучайную функцию времени $\xi_1(t) = \varphi(\omega_1, t)$, будем называть также ***реализацией*** **с.п.** Так как **с.п.** может иметь бесконечное множество сечений и каждое это новая случайная величина, то случайный процесс можно задать **семейством** $\{\xi(t)/t \in T\}$**, случайных величин** (реализаций **с.п.**), параметр $T \in R$. Таким образом, пару $(\{\omega/\omega \in \Omega\}, \{\xi(t)/t \in R\})$ можно определить как случайную функцию $\varphi(\omega, t)$.

Если рассматривать одно сечение процесса и одну реализацию, то всю информацию о нем можно получить из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(t) = F(t, t_1), \\ \xi_1(t) = \varphi(\omega_1, t). \end{cases}$$

Интуитивно ясно, что только этой информации недостаточно для изучения процесса. Чем больше сечений, тем точнее задан **с.п.**, однако сложность его описания резко возрастает. Для n сечений мы имеем функцию $2n$ переменных. Более того, в общем случае, перспективы на полное описание каких-либо реальных **с.п.** становятся призраными, если не вводить **с.п.** как математический объект, обладающий удобными для математического описания свойствами. Рассмотрим двумерный закон распределения

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\}, \qquad (3.3)$$

который составлен по двум сечениям процесса. Функция четырех переменных (3.3) является исчерпывающей характеристикой для специального типа **с.п.** – процессов **без последействия** или **марковских** процессов. Процесс называется **марковским,** если для любого момента времени все вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние [9, 12, 14].

Марковские процессы широко используются в инженерной практике, как процессы, допускающие относительно простые аналитические решения. Но главное, благодаря свойству отсутствия последействия, они хорошо описывают реальность. Имеется обширная литература [5, 9, 12-14].

Пример. Пусть имеем дискретный **с.п.** с непрерывным временем, тогда при $t = t_1$, случайная величина $\xi(t_1) = \varphi(\omega, t_1)$ имеет закон распределения, представленный табл. 3.3.

Таблица 3.3

$\xi(t_1)$	$x_0(t_1)$	$x_1(t_1)$	…	$x_n(t_1)$	…

$p(t_1)$	$p_0(t_1)$	$p_1(t_1)$	…	$p_n(t_1)$	…

$(\sum p_i(t_1)=1)$

Значения случайной величины $\xi(t_1)$: $x_n(t_1)=n$, а, $p_n(t_1)$ – вероятность этих значений, $n=0,1,\ldots$.

Например, при $t_1=0$, табл. 3.3 принимает вид

$\xi(0)$	0	1	2	…	n	…
$p(0)$	1	0	0	…	0	…

а при $t_1=T$, получаем

$\xi(T)$	0	1	2	…	n	…
$p(T)$	$p_0(T)$	$p_1(T)$	$p_2(T)$	…	$p_n(T)$	…

Зафиксируем элементарное событие: ω_n, означающее, что за время t произошло n событий, тогда можно говорить о реализации **с.п.**, как функции одной переменной t: $\xi_n=\xi_n(t)$, $t\in[0,\infty)$.

Пример. Пусть имеем несколько реализаций **с.п.** $\varphi(\omega,t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, представленного на рис. 3.2.

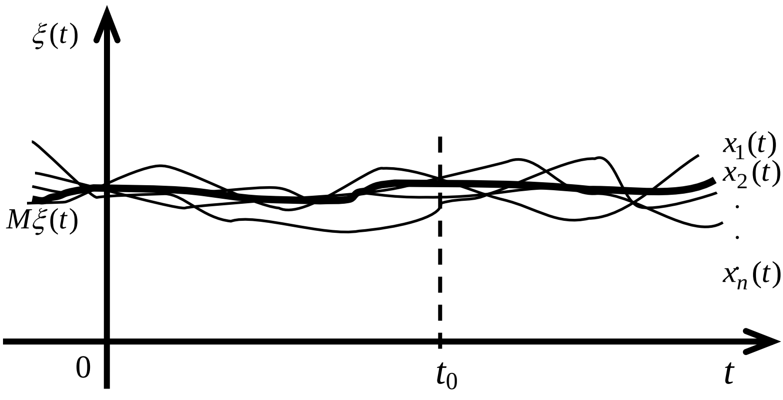

Рис. 3.2.Математическое ожидание реализации с.п.

Жирная линия $M\xi(t)$ есть функция, около которой «колеблются» всевозможные траектории. Эта функция называется **математическим ожиданием с.п**. Для получения функции $M\xi(t), t \in [0, \infty)$ необходимо иметь все возможные реализации **с.п.**, что в общем случае невозможно, за исключением отдельных, тривиальных **с.п.**

Из примера видно, что математическое исследование **с.п. -** проблема сложная. Для ее решения **с.п.** подразделяют на классы: а) марковские процессы, б) процессы с независимыми приращениями, в) гауссовские процессы и др.

Мы будем рассматривать **однородные** марковские процессы [2, 4, 5, 9, 10, 12, 15], в частности, однородные **цепи** Маркова и процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем: пуассоновский процесс и процесс рождения и гибели

3.2 Марковские процессы

Понятие марковкой цепи принадлежит русскому математику А.А. Маркову (в статьях 1906 – 1908 гг., он использовал это понятие для статистического анализа распределения букв в поэме А.С. Пушкина «Евгений Онегин»). Сам термин «цепь Маркова» был предложен русским математиком А.Я. Хинчиным [15].

Дискретные цепи Маркова.

Пусть имеем систему *S*, которая может находится в одном из конечного или счетного множества несовместных состояний C_i, $i \in N$. Переход системы из состояния в состояние, вообще говоря, случаен и возможен только в фиксированные моменты времени t_n, $n = 0,1,2,\ldots$. Опишем функционирование системы в теминологии **с.п**.

Пусть в момент времени t_n, система *S* перешла из состояния C_j в состояние C_i. Для ее описания зададим дискретный **с.п**. функцией $\xi_i(t_n) = \varphi(\omega_i, t_n)$. Элементарное событие ω_i отражает пребывание системы *S* в состоянии C_i. Кроме того, нам необходимо задать начальное распределение вероятностей для момента времени $t = t_0$ и, в общем случае, задать все сечения процесса и возможность его реализации.

Получить такую информацию о **с.п.** – задача трудновыполнимая, да и в ряде случаев не нужная, если использовать понятие **цепей Маркова**.

В самом деле, пусть имеем последовательность (цепь) зависимых целочисленных случайных величин $\xi_n = \xi(t_n)$. Если в момент t_n система пришла в состояние C_i, то будем считать, что $\xi_n = i$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ образует дискретную **цепь Маркова**, если

$$P\{\xi_n = i / \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_{n-2} = i_{n-2}, \xi_{n-1} = j\} =$$
$$= P\{\xi_n = i / \xi_{n-1} = j\} = p_{ij}^{(n)}, \quad (3.4)$$

с начальным состоянием

$$P\{\xi_0 = i\} = p_i^{(0)}, \ \sum_i p_i^{(0)} = 1. \quad (3.5)$$

Вероятности $p_{ij}^{(n)}$ – называются вероятностями перехода системы *S* из состояния C_i в состояние C_j. Свойство (3.4), цепи Маркова, называется **свойством отсутствия последействия**, которое интерпретируется так: **поведение процесса в будущем зависит только от текущего настоящего и не зависит от его прошлого**, $j \in N$.

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если каждое ее состояние может быть достигнуто из любого другого (то есть для любых двух состояний системы *S*: C_i и C_j, существует целое число *k*, такое, что $p_{ij}^{(k)} > 0$). Для однородной цепи имеем $p_{ij} > 0$, $\forall i, j$. Внутри цепи Маркова среди множества ее состояний $\{C_i\}$ могут быть **замкнутые** подмножества состояний $\{C_j\}$, тоесть такие состояния в которые нельзя за один шаг попасть из произвольного состояния, не являющемся замкнутым (Если такое множество состоит из одного состояния, то оно называется **поглощающим**). Состояние C_j цепи Маркова называется **возвратным**, если в него допускается возвращение, иначе состояние называется невозвратным. Состояние C_j цепи назвается периодическим с конечным периодом, если попадание цепи в это состояние кратно первому попаданию пройденному пути, иначе - **апериодическим**.

Введем важное для нас понятие эргодичности. Состояние C_i цепи Маркова называется **эргодическим**, если оно возвратно, с конечным временем возвращения и непериодическое. Цепь Маркова **эргодична** (обладает свойством эргодичности), если все ее состояния эргодические. Свойство эргодичности цепи и только оно приводит к стационарным характеристикам.

Определение. Цепь Маркова $\{\xi_n\}$ называется **однородной**, если вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ не зависят от времени, то есть

$$\forall n\,,\ p_{ij}^{(n)} = p_{ij}\,. \tag{3.6}$$

Однородная цепь Маркова эргодична.

Пусть $\rho_j^{(n)} = P\{\xi_n = j\}$ – вероятность того, что в момент времени t_n система находится в состоянии C_j. Интерес представляет существование предела

$$\rho_j = \lim_{n\to\infty} \rho_j^{(n)}\,. \tag{3.7}$$

Нахождение распределения вероятностей $\{\rho_j\}$ *является основной задачей исследования цепей Маркова*. Если предел в (3.7) существует, то говорят, что система S имеет **стационарный** режим функционирования, если $\forall j\,,\ \rho_j > 0$.

Предельные вероятности $\{\rho_j\}$ не зависят от начальных условий, $\forall j\,,\ \rho_j$, интерпретируется как **доля времени**, в течение которого система находится в состоянии C_j **относительно всех состояний** и однозначно определяется равенствами:

$$\sum_i \rho_i = 1, \qquad (3.8)$$

$$\rho_j = \sum_i \rho_i \cdot p_{ij}, \ \forall j. \qquad (3.9)$$

Формула (3.8) называется условием нормировки.

Система алгебраических уравнений (3.9) является однородной, и для ее однозначного решения необходимо добавить условие нормировки (3.8), при этом, любое уравнение из системы (3.9) можно при желании исключить.

Матрица П, составленная из элементов p_{ij}, называется ***матрицей вероятностей перехода***:

$$\Pi = \left(p_{ij}\right). \qquad (3.10)$$

Определим вектор вероятностей состояний системы

$$\overline{\rho} = (p_1, p_2, ..., p_n, ...),$$

тогда система (3.9) записывается в виде

$$\overline{\rho} = \overline{\rho} \cdot \Pi. \qquad (3.11)$$

Часто представляют интерес переходы системы из состояния в состояние в произвольный момент времени (переходный режим).

Для этого нужно определить распределение вероятностей $\{\rho_j^{(n)}\}$ пребывания системы в состоянии C_j в момент t_n. Зададим вектор вероятностей $\overline{\rho}^{(n)}$, в момент t_n, равенством

$$\overline{\rho}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, ..., p_n^{(n)}, ...).$$

Используя (3.9) и определение вероятностей переходов (3.4) - условие отсутствия последействия - имеем

$$\overline{\rho}^{(1)} = \overline{\rho}^{(0)} \cdot \Pi,$$

где $\overline{\rho}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ..., p_n^{(0)}, ...)$ – начальное состояние системы (3.5). Отсюда для любого *n*, по рекуррентной формуле, получаем

$$\overline{\rho}^{(n)} = \overline{\rho}^{(n-1)} \cdot \Pi = \overline{\rho}^{(0)} \cdot \Pi^n, \ n \in N. \qquad (3.12)$$

Если за единицу времени выбран 1 ч, то возводя матрицу перехода в степень *n*, узнаем состояние системы *S* через *n* ед. вр.

Уравнение (3.12) дает общий метод вычисления вероятностей на n-ом шаге процесса по заданной матрице переходов П и начальном распределении $\overline{\rho}^{(0)}$.

Если стационарный режим существует, то

$$\overline{\rho} = \lim_{n\to\infty} \overline{\rho}^{(n)}. \qquad (3.13)$$

Пример. Рассмотрим систему S, которая находится, в любой момент времени t, в одном из трех несовместных состояний C_1, C_2, C_3. Переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно в фиксированные моменты времени $t_k = k$, $k \in N$, в соответствии с размеченным графом [9, 12] состояний рис. 3.3. Требуется исследовать функционирование системы S - оценить скорость сходимости к стационарному режиму и вычислить стационарное распределение вероятностей .

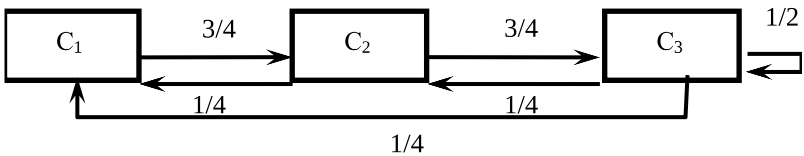

Рис. 3.3. Размеченный граф возможных состояний системы S.

Решение. Вычислим стационарное распределение вероятностей, то есть найдем собственный вектор $\overline{\rho} = (p_1, p_2, p_3)$, где $p_i = P\{C_i\}$, $i = 1,2,3$.

Из (3.11) имеем $\overline{\rho} = \overline{\rho} \cdot \Pi$, где

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

С учетом условия нормировки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ получим систему

$$\begin{cases} p_1 = 0 \cdot p_1 + \frac{1}{4} \cdot p_2 + \frac{1}{4} \cdot p_3, \\ p_2 = \frac{3}{4} \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + \frac{1}{4} \cdot p_3, \\ p_3 = \frac{1}{4} \cdot p_1 + \frac{3}{4} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3, \qquad * \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3. \end{cases}$$

Решая ее (например, без уравнения помеченного (*)), получаем стационарное распределение вероятностей:

$$\bar{\rho} = (0{,}2; 0{,}28; 0{,}52).$$

Оценим скорость сходимости. Для этого вычислим вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$, по формуле (3.6), при различных начальных условиях:

а) $p^{(0)} = (1{,}0{,}0)$, результаты представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	1,000	0,000	0,250	0,178	0,203	…	0,200
$p_2^{(n)}$	0,000	0,750	0,062	0,359	0,254	…	0,280
$p_3^{(n)}$	0,000	0,250	0,688	0,454	0,543	…	0,520

б) $p^{(0)} = (0{,}1{,}0)$, соответствующие результаты отражены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0,000	0,000	0,187	0,203	0,199	…	0,200
$p_2^{(n)}$	1,000	0,750	0,375	0,250	0,289	…	0,280
$p_3^{(n)}$	0,000	0,250	0,438	0,547	0,512	…	0,520

в) $p^{(0)} = (0{,}0{,}1)$, в итоге получаем табл. 3.6:

Таблица 3.6

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0,000	0,000	0,187	0,203	0,199	…	0,200
$p_2^{(n)}$	0,000	0,750	0,313	0,266	0,285	…	0,280
$p_3^{(n)}$	1,000	0,250	0,500	0,531	0,516	…	0,520

Из таблиц 3.4-3.6 видно, что вхождение системы в стационарный режим происходит достаточно быстро, так как уже после четырех шагов вероятности мало отличаются от предельных (независимость от начальных условий).

Замечание. Оценка скорости сходимости переходных вероятностей к стационарным зависит от **собственных** значений матрицы П и иллюстрируется **барицентрической системой координат** [9].

Непрерывные цепи Маркова.

Если система с конечным или счетным числом состояний может переходить из одного состояния в другое в любой момент времени t, то будем говорить, что задана **цепь Маркова** с **непрерывным временем** (или задан **с.п**. Маркова).

Определение. **С.п**. $\xi(t)$ образует **непрерывную цепь Маркова**, если для произвольной последовательности $\{t_i\}$, $i=1,2,...,n$, такой, что $t_0 < t_1 < ... < t_n$, выполняется

$$P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, ..., \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\} =$$
$$= P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}. \quad (3.14)$$

Это определение является непрерывным аналогом определения (3.5). Интерпретация та же самая: состояние системы S в будущем зависит только от текущего ее состояния (настоящего) и не зависит от того, как и когда система попала в это состояние.

Напомним, цепь Маркова с непрерывным временем называется **процессом Маркова.**

Потоки событий

Потоком событий называется появление событий, обычно однородных, в случайные моменты времени [3, 9].

Рассмотрим временную ось (рис. 3.4). Поток событий представляют, как последовательность случайных точек $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_n$ на оси, разделенных временными интервалами $T_i = (\delta_{i+1} - \delta_i)$, $i \in N$, длина которых, очевидно, также случайна.

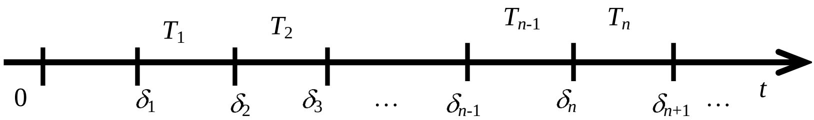

Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация потока событий

Потоки событий различаются по законам распределения длин интервалов T_i между событиями, по их зависимости или независимости, регулярности и др.

Наиболее изучены потоки, которые обладают свойствами:

а) **стационарности** – все его вероятностные характеристики не меняются со временем;

б) **отсутствия последействия** – для любых непересекающихся временных интервалов на временной оси, число событий находящихся на одном интервале, **не зависит** от того, что происходит с событиями на другом интервале;

в) **ординарности** – практическая невозможность на достаточно малом временном интервале появиться двум и более событиям.

Для формализации этих свойств, введем понятие **интенсивности,** которое уже встречалось в распределениях (параметр λ в распределениях Пуассона и экспоненциальном).

Пусть $p_i(t, \Delta t)$ – вероятность того, что за время Δt, примыкающего к моменту времени *t*, появилось *i* событий, $i = 0,1,2,...$.

Рассмотрим полную группу несовместных событий, для которых, по определению (например, как в табл. 3.3), имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t,\Delta t) = 1. \tag{3.15}$$

Введем обозначение $p_{>1}(t,\Delta t) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i(t,\Delta t)$ – вероятность того, что за время Δt появилось более одного события.

Тогда формула (3.15) примет вид

$$p_0(t,\Delta t) + p_1(t,\Delta t) + p_{>1}(t,\Delta t) = 1. \tag{3.16}$$

Формализуя ординарность (учитывая свойства бесконечно малых), получаем

$$p_{>1}(t,\Delta t) = o(\Delta t), \tag{3.17}$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем наименьшая из вероятностей $p_0(t,\Delta t)$ и $p_1(t,\Delta t)$.

Обозначим через $M(\xi(t,\Delta t))$ – математическое ожидание числа событий, появившихся за время Δt; тогда, по определению,

$$M(\xi(t,\Delta t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i(t,\Delta t).$$

С учетом ординарности имеем

$$M(\xi(t,\Delta t)) = 0 \cdot p_0(t,\Delta t) + 1 \cdot p_1(t,\Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot o(\Delta t)$$

или, учитывая свойства бесконечно малых,

$$M(\xi(t,\Delta t)) = p_1(t,\Delta t) + o(\Delta t).$$

Положим

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\xi(t,\Delta t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}.$$

Определение. Функция $\lambda(t)$ называется **интенсивностью** (**плотностью**) ординарного потока событий,

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\xi(t,\Delta t))}{\Delta t}. \tag{3.18}$$

Стандартная трактовка $\lambda(t)$ – **среднее число событий, приходящихся на единицу времени**, для участка Δt, примыкающего к моменту *t*.

Ясно, что $\forall t,\ \lambda(t) \ge 0$ и имеет размерность обратную времени $-\ [1/\textit{вр}]$.

Пример. Среднее число событий ординарного потока, на интервале длиной τ, примыкающего к *t*, равно

$$M(\xi(t,\tau)) = \int_{t}^{t+\tau} \lambda(t)dt\,, \tag{3.19}$$

в частности, для стационарного потока, имеем

$$M(\xi(t,\tau)) = \lambda \cdot \tau\ ,$$

тогда, как следует из (3.19), $\lambda(t) \equiv \lambda$.

Наконец, **отсутствие последействия** формулируется следующим образом.

Пусть $p_n(t+\tau)$ – вероятность того, что за время τ, примыкающего к моменту времени *t*, появилось *k* событий при условии, что в момент времени *t* было $n-k$ событий. Тогда условие отсутствия последействия означает, что

$$p_n(t+\tau) = p_{n-k}(t) \cdot p_k(\tau)\,,\ k = 0,1,...,n\,. \tag{3.20}$$

В частности, при $\tau = \Delta t$ и $k = 1$, имеем

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t) \cdot p_1(\Delta t)\,. \tag{3.21}$$

Замечание. Формула (3.20) в терминах биологии может интерпретироваться как вероятность роста популяции на *k* единиц за время τ. Аналогично, имеет смысл говорить о гибели популяции на *k* единиц за время τ, если в момент *t* популяция состояла из ($n+k$) единиц, то есть,

$$p_n(t+\tau) = p_{n+k}(t) \cdot \widetilde{p}_k(\tau)\,.$$

Определение. Поток событий называется **простейшим,** если он обладает свойствами:

а) стационарности: $\lambda = const$,

б) отсутствия последействия: $p_{n+k}(t+\Delta t) = p_n(t) \cdot p_k(\Delta t)$,

в) ординарности: $p_{>1}(t+\Delta t) = o(\Delta t)$.

Покажем что, если поток событий простейший, то распределение длин интервалов между поступлениями любой пары соседних событий **показательное** (экспоненциальное) с плотностью

$$\rho(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t},\ \lambda > 0,\ t \in [0, \infty). \tag{3.22}$$

Следующие постулаты сразу следуют из определения простейшего потока:

1) для всякого малого $\Delta t > 0$, существует ненулевая вероятность появления события;
2) если система начинает функционировать с момента $t = 0$, то первое появление события имеет место в момент $t > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 1 - \int_0^t \rho(\tau) d\tau, \tag{3.23}$$

если $\rho(t)$ – плотность, то $f(t) = P$ {первое событие появилось после момента t}.

Из свойства отсутствия последействия, имеем

$$f(t + \Delta t) = f(t) \cdot f(\Delta t),\ \forall t \in [0, \infty),\ \Delta t > 0. \tag{3.24}$$

Вычитая из обеих частей (3.24) $f(t)$, получим

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f(t) \cdot (1 - f(\Delta t)).$$

Разделим обе части на Δt и перейдем к пределу по Δt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = -f(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Если пределы существуют, то полагая

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t} > 0,$$

будем иметь

$$f'(t) = -\lambda \cdot f(t), \text{ где } f(0) = 1.$$

Решая это уравнение, получаем выражение

$$f(t) = e^{-\lambda \cdot t}.$$

Подставляя его в (3.22), имеем

$$e^{-\lambda t} = 1 - \int_0^t \rho(\tau) d\tau$$

или

$$\int_0^t \rho(\tau) d\tau = 1 - e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (3.25)$$

Дифференцируя (3.25), получаем требуемое

$$\rho(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \blacktriangledown \qquad (3.26)$$

Определим

$$V_k(t) \equiv P\{\text{в интервале}(0,t)\ \text{появилось ровно}\ k\ \text{событий}\}.$$

Учитывая условие отсутствия последействия, можем воспользоваться сверткой [2, 11] (см формулу (3.49)):

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(t-\tau) \cdot \rho(\tau) d\tau = \int_0^t V_{k-1}(\tau) \cdot \rho(t-\tau) d\tau,$$

для $k \in N$. (3.27)

Используя (3.22), имеем

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(\tau) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t-\tau)} d\tau. \qquad (3.28)$$

Из смысла $\rho(t)$ и (3.27), получаем

$$V_0(t) = e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (3.29)$$

Дифференцируя (3.28) по *t*, приходим к системе уравнений

$$\frac{dV_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot V_{k-1}(t),\ k \in N. \qquad (3.30)$$

Система рекуррентных линейных дифференциальных уравнений (3.30) легко решается, начиная с $k = 1$, если учесть (3.29) и начальные условия: $V_0(0) = 1$, $V_k(0) = 0$, $k \in N$. Решение системы (3.30) имеет вид (**приложение 7**):

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t},\ k = 0,1,\dots\ . \qquad (3.31)$$

Формула (3.31) представляет **пуассоновский** процесс (или **чисто с.п.**) с дискретным пространством состояний и непрерывным временем.

Система уравнений (3.30) называется **процессом чистого рождения** [9].

Если в некоторой системе S переходы из одного ее состояния в любое другое удовлетворяют условиям простейшего потока, то говорят, что имеет место **пуассоновский процесс** с непрерывным временем. Обратное также справедливо. Пуассоновский процесс обладает некоторыми замечательными свойствами, используя которые легко получать системы уравнений похожих на (3.30), часто применяемые в системах массового обслуживания.

3.3 Системы массового обслуживания

Под **системой массового обслуживания** будем понимать комплекс (систему), состоящий из: а) случайного **входящего потока** требований (событий), нуждающихся в обслуживании, б) **дисциплины** очереди, в) **механизма**, осуществляющего обслуживание [14].

Входящий поток. Для описания входящего потока обычно задается вероятностный закон, управляющий последовательностью моментов поступления требований на обслуживание и количеством требований в каждом поступлении (то есть требования поступают либо **единичные**, либо **групповые**). Источник, генерирующий требования, считается неисчерпаемым. Требование, поступившее на обслуживание, может обслуживаться сразу, если есть свободные обслуживающие приборы, либо ждать в очереди, либо отказаться от ожидания, то есть покинуть обслуживающую систему.

Дисциплина очереди. Это описательная характеристика. Требование, поступившее в систему, обслуживается в порядке очереди – дисциплина очереди: «**первым пришел – первым обслужен**». Другая дисциплина очереди: «**последним пришел – первым обслужен**» - это обслуживание по приоритету. Наконец, обслуживание требований может быть **случайным**.

Механизм обслуживания. Характеризуется продолжительностью и характером процедур обслуживания. Обслуживание может осуществляться по принципу: «на одно требование – один обслуживающий прибор». Если в системе несколько приборов, то параллельно могут обслуживаться несколько требований. Часто используют групповое обслуживание, то есть требование обслуживается одновременно несколькими приборами. В некоторых случаях требование обслуживается последовательно несколькими приборами – это **многофазовое** обслуживание.

По окончании обслуживания требование покидает систему.

Анализ системы массового обслуживания. Целью является рациональный выбор структуры обслуживания и процесса обслуживания. Для этого требуется разработать показатели эффективности систем массового обслуживания. Например, требуется знать: *вероятность того, что занято или свободно k приборов; распределение вероятностей свободных или занятых приборов от обслуживания; вероятность того, что в очереди находится заданное число требований; вероятность того, что время ожидания в очереди превысит заданное.* К показателям, характеризующих эффективность функционирования системы в среднем, относятся: *средняя длина очереди; среднее время ожидания обслуживания; среднее число занятых приборов; среднее время простоя приборов; коэффициент загрузки системы и др. Часто вводятся экономические показатели.* Разработкой математических моделей, получением числовых результатов и анализом показателей эффективности занимается **теория массового обслуживания.**

Таким образом, основные элементы системы массового обслуживания укладываются в следующую схему (рис. 3.5):

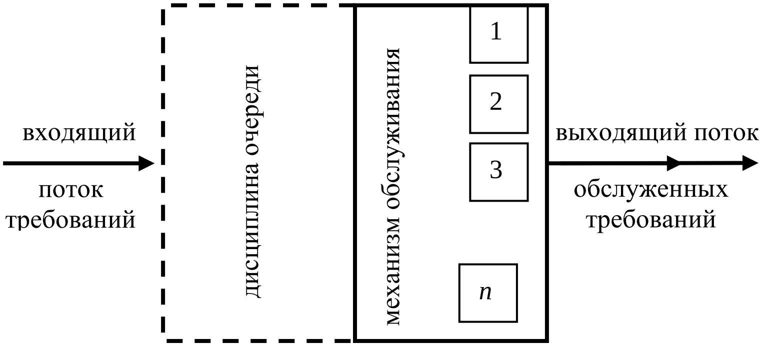

Рис. 3.5. Связь основных элементов составляющих СМО

В качестве примера (С.94) построим ***МОДЕЛЬ 1*** СМО, соответствующую рис. 3.5.

Описание модели (СМО с ожиданием). Пусть имеем СМО, состоящую из n идентичных, параллельных каналов (приборов) обслуживания [14]. ***Входящий поток***: на СМО поступает случайный поток требований интенсивностью α. Интервал времени между поступлениями соседних требований является случайной величиной ξ, образующей пуассоновский процесс, где для любого фиксированного t,

$$V_k(t) = \frac{(\alpha t)^k}{k!} \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

где $V_k(t)$ – вероятность того, что за время t в СМО поступит ровно k требований, α – среднее число требований, поступающих в СМО в единицу времени.

Дисциплина очереди: Если требование, поступившее в СМО, застает все приборы занятыми, то оно встает в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится обслуживающий прибор. Время обслуживания требования любым прибором является случайной величиной η, удовлетворяющей экспоненциальному закону распределения,

$$F(t) = P\{\eta < t\} = 1 - \exp(-\beta \cdot t),$$

где $\beta = 1/t_{cp}$, t_{cp} – среднее время обслуживания требования.

Механизм обслуживания: каждый прибор, в любой момент времени *t*, $t \in [0, \infty)$, может обслуживать не более одного требования. Обслуженное требование покидает СМО.

Пусть $p\ (k, t_0, t)$ - вероятность того, что в момент времени *t* в системе находится *k* требований, при условии, что в начальный момент $t = t_0$ находилось *i* требований, $t, t_0 \in [0, \infty)$, $k, i = 0,1,...$ Требуется проанализировать эффективность работы системы.

Решение. Для удобства, введем обозначение $p_k(t) = p\ (k, t_0, t)$. Пусть Δt – бесконечно малое приращение времени. Тогда, пользуясь формулой Тейлора, запишем вероятность того, что в СМО за время Δt не поступит ни одно требование, в виде:

$$V_0(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t} = 1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)\ .$$

Аналогично, вероятность того, что в СМО за время Δt поступит одно требование, будет:

$$V_1(\Delta t) = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)}{1!} \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t} = \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Вероятность того, что за время Δt в СМО поступит два или более требований:

если $V_0(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t} = 1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} V_k(\Delta t) = 1 - V_0(\Delta t) - V_1(\Delta t) = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)^2}{2!} + ... = o(\Delta t)\,.$$

Далее, вероятность того, что за время Δt требование будет обслужено:

$$1 - e^{-\beta \cdot \Delta t} = \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Вероятность того, что за время Δt будет обслужено два или более требования:

$$\frac{(\beta \cdot \Delta t)^2}{2!} + ... = o(\Delta t)\,.$$

Вероятность того, что за время Δt будет обслужено одно из k требований, находящихся в системе, найдем следующим образом:

- в силу ординарности, P{будет обслужено более одного требования за время Δt } = $o(\Delta t)$;
- $P\{$требование не будет обслужено за время $\Delta t\} = e^{-\beta \cdot \Delta t}$;
- P{ни одно из k требований не будут обслужены все за время Δt }$= (e^{-\beta \cdot \Delta t})^k = 1 - k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$;
- P{будет обслужено хотя бы одно из k требований за время Δt }$= 1 - e^{-k \cdot \beta \cdot \Delta t} = k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

Перечисленные вероятности событий, с учетом теоремы умножения вероятностей, формулы полной вероятности и свойств пуассоновского процесса, для $0 \le k \le n-1$, дают уравнение

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) \cdot (1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) \cdot (1 - k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$+ p_{k-1}(t) \cdot (\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) + p_{k+1}(t) \cdot ((k+1) \cdot \beta +$$
$$+ o(\Delta t)) + o(\Delta t) . \quad (3.32)$$

В словесной формулировке уравнение (3.32) звучит так: вероятность того, что в момент времени ($t + \Delta t$) в системе находится k требований ($k \le n-1$) равна вероятности того, что в момент t в системе находилось k требований и ни одного требования не поступило и не было обслужено, плюс вероятность того, что в момент времени t в системе находилось ($k-1$) требование и за время Δt поступило одно требование в систему, плюс вероятность того, что в момент времени t в системе находилось ($k+1$) требование на обслуживании и за время Δt одно из (k+1) требований было обслужено, плюс вероятность того, что за время Δt произошло более одного события.

С учетом свойств бесконечно малых, уравнение (3.32) преобразуем, к виду:

$$p_k(t + \Delta t) - p_k(t) = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot \Delta t \cdot p_k(t) + \alpha \cdot \Delta t \cdot p_{k-1}(t) +$$
$$+ (k+1) \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot p_{k+1}(t) + o(\Delta t) .$$

Разделив обе части на Δt и переходя к пределу, получим

$$p'_k(t) = -(\alpha + k\cdot\beta)\cdot p_k(t) + \alpha\cdot p_{k-1}(t) + (k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t),$$
$$1 \le k \le n-1. \quad (3.33)$$

Для $k \ge n$ заметим, что за время Δt может быть обслужено не более чем одно из n требований, так как число обслуживающих приборов равно n.

Таким образом, для $k \ge n$, имеем уравнение

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)\cdot(1-\alpha\cdot\Delta t + o(\Delta t))\cdot(1 - k\cdot\beta\cdot\Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$+ p_{k-1}(t)\cdot(\alpha\cdot\Delta t + o(\Delta t)) + p_{k+1}(t)\cdot(n\cdot\beta\cdot\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t).$$

Производя выкладки, аналогичные выводу уравнения (3.32), получим

$$p'_k(t) = -(\alpha + k\cdot\beta)\cdot p_k(t) + \alpha\cdot p_{k-1}(t) + n\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t). \quad (3.34)$$

Заметим, что при $k = 0$, вероятность $p_{k-1}(t) = p_{-1}(t) = 0$. Учитывая это, окончательно имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\alpha\cdot p_0(t) + \beta\cdot p_1(t); \\ p'_k(t) = -(\alpha + k\cdot\beta)\cdot p_k(t) + \alpha\cdot p_{k-1}(t) + \\ \qquad + (k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t),\ 1 \le k \le n-1; \\ p'_k(t) = -(\alpha + n\cdot\beta)\cdot p_k(t) + \alpha\cdot p_{k-1}(t) + \\ \qquad + n\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t), k \ge n, \end{cases} \quad (3.35)$$

Для которой начальные условия имеют вид:

$$p_i(t_0) = 1,\ p_k(t_0) = 0,\ \forall k \ne i. \quad (3.36)$$

Решение системы дифференциальных уравнений процесса рождения и гибели (Birth-death process) вида (3.35), в переходном режиме и начальными условиями (3.36), содержит трансцендентные функции и малопригоден на практике. Реальные системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования [14], который описывается системой алгебраических уравнений. Кроме того, учитывая, что получение необходимых формул для стационарного режима не вызывает особых трудностей, часто без потери информации, делает его привлекательным для анализа систем.

В самом деле, если $\boldsymbol{\alpha/(n\cdot\beta)<1}$, то марковская СМО **эргодична** (вероятность состояния системы не зависит от времени) [14], то есть

$$\forall k\,,\ (\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0\ )\ \text{и}\ (\lim_{t\to\infty} p'_k(t) = 0\ ).$$

Тем самым, система (3.35) сводится к системе однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1; \\ 0 = -(\alpha + k\cdot\beta)\cdot p_k + \alpha\cdot p_{k-1} + (k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le k \le n-1; \\ 0 = -(\alpha + n\cdot\beta)\cdot p_k + \alpha\cdot p_{k-1} + n\cdot\beta\cdot p_{k+1}, \quad k \ge n. \end{cases} \tag{3.37}$$

Для единственности решения системы (3.37) следует добавить условие нормировки, которое является следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1\,. \tag{3.38}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} z_k = k\cdot\beta\cdot p_k - \alpha\cdot p_{k-1}, & k = 1,\dots,n; \\ \tilde{z}_k = n\cdot\beta\cdot p_k - \alpha\cdot p_{k-1}, & k > n. \end{cases} \tag{3.39}$$

В новых обозначениях, система (3.37) примет вид:

$$\begin{cases} z_0 = 0; \\ z_k - z_{k-1} = 0; \\ \tilde{z}_k - \tilde{z}_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\forall k\,,\ z_k = 0\,,\ \tilde{z}_k = 0\,.$$

Возвращаясь к обозначениям (3.39), получаем

$$\begin{cases} k\cdot\beta\cdot p_k = \alpha\cdot p_{k-1}, & k = 1,\dots,n; \\ n\cdot\beta\cdot p_k = \alpha\cdot p_{k-1}, & k > n. \end{cases}$$

Выразим все вероятности через p_0. Имеем при $k = 1$

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot p_0\,,$$

при $1 < k \le n$

$$p_k = \frac{\alpha}{k\cdot\beta}\cdot p_{k-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot k! \cdot p_0\,, \tag{3.40}$$

при $k > n$

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n\cdot\beta}\right)^{n-k} \cdot p_n$$

или

$$p_k = \frac{\alpha^k}{n!\cdot n^{k-n}\cdot\beta^k} \cdot p_0 . \qquad (3.41)$$

Для нахождения p_0, воспользуемся условием нормировки (3.38):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot p_0 + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{n!\cdot n^{k-n}} \cdot p_0 = 1 .$$

После элементарных преобразований, получим

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n\cdot\beta}\right)^s\right)^{-1} .$$

Учитывая, что $\alpha/(n\cdot\beta) < 1$ имеем

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n\cdot\beta}\right)^s = \frac{1}{1-\alpha/(n\cdot\beta)} .$$

Окончательно получаем:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!(1-\alpha/(n\cdot\beta))}\right)^{-1} ,$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0, \ 1 \le k \le n-1; \\ \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{n!\cdot n^{k-n}} \cdot p_0, \ k \ge n, \ (\alpha/(n\cdot\beta) < 1). \end{cases}$$

Замечание. Очевидное условие $\alpha/(n\cdot\beta) < 1$, означает, что задаваемый входящий поток всегда меньше, чем суммарный выходящий, иначе остаток ряда в (3.38) был бы расходящимся, следовательно, система не была бы эргодична.

Если p_k известны, то некоторые показатели эффективности можно вывести, исходя из свойств простейшего потока и физической интерпретации вероятностей и параметров. Например:

- $P\{\text{система свободна}\} = p_0$;
- P\{занято k обслуживающих устройств\}= p_k ;
- P\{все обслуживающие устройства заняты\} = П

или, учитывая формулы для p_k, получим

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \;=\; \Pi = \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)} \cdot p_0 \,,$$

- P\{время ожидания в очереди τ больше заданного t_0\}= $= P\{\tau > t_0\}$.

Исходя из свойства аддитивности параметров простейшего потока [3], для стационарного режима функционирования систем экспоненциального типа, параметр $n\cdot\beta-\alpha$ является интенсивностью, определяющей движение (время) требований, находящихся в очереди, рассматриваемое как случайную величину τ с экспоненциальной функцией распределения. Отсюда функция $\exp(-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_0)$ есть вероятность того, что ни одно требование за время t_0 не будет обслужено. Учитывая, что П есть вероятность существования очереди, получаем

$$P\{\tau > t_0\} = \Pi\cdot\exp(-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_0)\,.$$

- $t_{ож}$ - среднее время ожидания в очереди, $t_0 \in [0,\infty)$;

В стационарном режиме функционирования систем, вероятности p_k интерпретируются как доля единицы времени, в течение которого СМО находится в состоянии C_k (за единицу времени принята единица измерения параметров системы). Следовательно, доля времени существования очереди в СМО равна П. С другой стороны, $n\cdot\beta-\alpha$ - среднее число требований, характеризующих очередь в единицу времени. Отсюда, для $t_{ож}$ получаем

$$t_{ож} = \Pi/(n\cdot\beta-\alpha);$$

- A – средняя длина очереди,

$$A = \sum_{k=n+1}^{\infty} k\cdot p_k = \frac{(\alpha/n\cdot\beta)}{(1-\alpha/n\cdot\beta)^2}\cdot p_n,$$

где $p_n = \dfrac{(\alpha/\beta)^n}{n!}\cdot p_0$;

- B – среднее число обслуживаемых требований,

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} k\cdot p_k + n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} p_k;$$

- R – среднее число требований в системе,

$$R = A + B;$$

- L – среднее время пребывания требования в системе,

$$L = \frac{\Pi}{n\cdot\beta-\alpha} + \frac{1}{\beta};$$

- $K_З$ – коэффициент загрузки системы,

$$K_З = B/n.$$

Будем считать, что предложенные здесь показатели эффективности (в зарубежных публикациях подобные показатели называют **операционными** характеристиками) дают достаточно полное представление о функционировании так организованной СМО.

Решение для ***МОДЕЛИ 1*** было получено в стационарном режиме, из системы (3.35). Обычно такие решения находят точно, если воспользоваться, популярным сейчас во многих теориях, методом **декомпозиции** [12, 14].

Суть метода. Функционирование СМО представляется в виде связного графа ее состояний C_i, $i\in N$. Переход системы из состояния C_i в состояние C_j графически осуществляется по ориентированным ребрам с заданными **интенсивностями** переходов λ_{ij}. Если переход невозможен, то $\lambda_{ij}=0$.

В стационарном режиме действует принцип равновесия: сумма «входов» в любое состояние равна сумме «выходов» из него. Это позволяет записать уравнения равновесия по каждому из состояний (принцип декомпозиции).

Рассмотрим применение метода декомпозиции на примере следующей задачи из теории надежности, подобной процессу **рождения** и **гибели**, но с конечным числом состояний [9, 12].

Пусть имеем однородный марковский процесс с конечным числом состояний C_k, $k = 0,1,...,n$. Если в момент t процесс находится в состоянии C_k, то за бесконечно малое время Δt он с вероятностью $\lambda_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ перейдет в состояние C_{k+1}, с вероятностью $\lambda_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ перейдет в состояние C_i и с вероятностью $1-(\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ останется в состоянии C_k. Если процесс находится в момент t в состоянии C_0, то за время Δt он может остаться в состоянии C_0 или перейти в состояние C_1, если же процесс находится в момент t в состоянии C_n, то за время Δt он может остаться в состоянии C_n или перейти в состояние C_{n-1}.

Обозначим через $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс находится в состоянии C_k, $k = 0,1,...,n$. Представим наш процесс в виде размеченного графа (рис. 3.6).

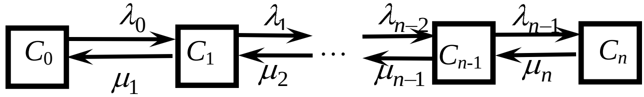

Рис. 3.6. Граф-схема **с.п**.Маркова с конечным числом состояний

Очевидно, что процесс эргодический (апериодичный, возвратный, ненулевой), следовательно, $\forall k$, $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0$.

В силу условия равновесия, для стационарного режима имеем (по каждому состоянию)

$$C_0: \ \lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1,$$

$$\ldots$$

$$C_k:\ \lambda_k \cdot p_k = \mu_{k+1} \cdot p_{k+1}, \text{ для } 1 \le k \le n-1.$$

Для состояния C_n получаем уравнение, совпадающее с предыдущим уравнением при $k = n-1$.

$$C_n:\ \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} = \mu_n \cdot p_n.$$

Таким образом, получаем однородную систему из n алгебраических уравнений с $(n+1)$ неизвестным p_k, $k = 0,1,\ldots,n$:

$$\begin{cases} \lambda_0 \cdot p_0 - \mu_1 \cdot p_1 = 0; \\ \lambda_k \cdot p_k - \mu_{k+1} \cdot p_{k+1} = 0, \quad 1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, если добавить условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

Окончательно получаем:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot p_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1} \cdot \lambda_{k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mu_1} \cdot p_0 = \delta_k \cdot p_0.$$

Учитывая условие нормировки, находим

$$p_k = \frac{\delta_k}{\sum_{i=0}^{n} \delta_i},\ \delta_0 = 1.$$

Замечание. Система уравнений вида (3.35) является элементарным частным случаем системы дифференциально-разностных уравнений Колмогорова-Чепмена (из которых она получается путем предельного перехода при $\Delta t \to 0$ для однородных по времени марковских процессов [4]), уравнения которой имеют вид:

$$p_{i,k}(t + \Delta t) = \sum_m p_{i,m}(t) \cdot p_{m,k}(\Delta t),\ \Delta t > 0,\ \forall i,k, \qquad (3.42)$$

где $p_{i,k}(t) = P\{$ в момент времени t система будет содержать k требований при условии, что в момент времени $t = 0$ в системе было i требований$\}$.

Система уравнений процесса рождения и гибели отличается от системы (3.42) тем, что переходы возможны только из соседних состояний:

$$\begin{cases} p_{i,k}(t+\Delta t) = p_{i,k-1}(t)\cdot p_{k-1,k}(\Delta t) + p_{i,k}(t)\cdot p_{k,k}(\Delta t) + \\ \qquad\qquad + p_{i,k+1}(t)\cdot p_{k+1,k}(\Delta t),\ (k \ge 1); \\ p_{i,0}(t+\Delta t) = p_{i,0}(t)\cdot p_{i,0}(\Delta t) + p_{i,1}(t)\cdot p_{1,0}(\Delta t). \end{cases} \tag{3.43}$$

Из системы (3.43), при $i = 0$, с точностью до обозначений, предельным переходом по $\Delta t \to 0$, после соответствующих преобразований, легко получить систему (3.35). Решение системы (3.35) можно найти, например, методами операционного исчисления [14].

3.3.1 Входящий поток требований

1. Пуассоновский поток

В подавляющем большинстве работ по ТМО рассматривается **пуассоновский** поток требований

$$V_k(t) = \frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda\cdot t},\ k = 0,1,\ldots,$$

где параметр λ определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих в СМО в единицу времени (или плотность потока, или интенсивность).

Основание: а) количественная оценка качества функционирования СМО выражается в простых, относительно других видов, потоков, аналитических зависимостях; б) при расчете показателей эффективности полученные результаты, как правило, отражают наиболее сложный случай (то есть показатели эффективности имеют более надежные значения).

Если пуассоновский поток нестационарный, то есть, $\lambda = \lambda(t)$, то для расчетов либо весь временной интервал $[0,T)$ разбивается на n временных отрезков, вообще говоря, не равных, и для каждого из них находятся $\lambda_i(t) = \lambda_i \cdot t$, где $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $\sum_{i=1}^{n}[t_{i-1}, t_i) = T$, либо используются численные методы (стандартные программы). В зависимости от поставленной цели выбирается аналитический подход либо численный.

Пуассоновский поток является одним из основных в процессах восстановления, которые изучает **теория восстановления** [14].

Некоторые пояснения. Имеется агрегат, состоящий из неограниченного числа функционально идентичных технических устройств. Первое устройство включается в работу в момент времени $t = t_0$ и работает случайное время T_1. В момент отказа оно мгновенно восстанавливается (или заменяется идентичным) и работает случайное время T_2 и т.д.

Процесс, измеримая функция $\xi(t)$ которого численно равна числу отказов устройства за время $t \in [0, T]$, называется **процессом восстановления**. В частности, если для фиксированного t, случайная величина $\xi(t)$ имеет экспоненциальное распределение $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau}$, $\tau \in [0, t]$, то процесс восстановления называется **однородным** пуассоновским процессом.

В теории восстановления обычно рассматриваются следующие характеристики процесса:

1) продолжительность времени t_k до k-го отказа;

2) функция восстановления $H(t)$, определяющая среднее число отказов устройств за время t;

3) плотность восстановления $\lambda(t) = (H(t))'_t$;

4) «возраст» устройства, достигнутый им за время t и не связанный с потоком восстановления;

5) остаточное время «жизни» элемента до первого отказа.

2. Рекуррентный поток.

Так называется поток с **ограниченным последействием** [3, 14], то есть последовательность моментов δ_k поступлений требований (рис. 3.4), образована независимыми случайными величинами ξ_k с функциями распределения $F_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$.

Если все $F_k(t)$ (за исключением может быть $F_1(t)$) совпадают, то есть, $\forall k$, $F_k(t) = F(t)$, $F(+0) < 1$, то последовательность моментов δ_k образует **процесс восстановления**. Следовательно, процесс восстановления – понятие более узкое, чем поток с ограниченным последействием, но шире, чем простейший поток.

Часто поток с ограниченным последействием определяют как поток, у которого случайные интервалы $T_k = [\delta_k, \delta_{k+1})$ между соседними по времени моментами поступления требований, считаются независимыми случайными величинами.

Стационарный поток с ограниченным последействием называется **потоком Пальма** [3]. Легко понять, что для него все случайные интервалы T_k должны иметь одну и ту же функцию распределения.

Примером потока Пальма является простейший поток (для потока независимого от времени – это геометрическое распределение, для непрерывного времени – это пуассоновский поток).

Случайный стационарный поток, у которого все интервалы T_k имеют нормальное (при $t \geq 0$) распределение, является потоком Пальма (очевидно, что последействие здесь имеется и очень сильное [3, 4]).

3. Потоки Эрланга.

Поток Пальма, у которого интервалы времени между поступлениями требований являются случайной величиной с функцией распределения Эрланга

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}, \; \lambda > 0 \qquad (3.44)$$

называется потоком Эрланга порядка *k*, $k = 1,2,...$.

В частности, поток Эрланга 1-го порядка является простейшим потоком и формализуется распределением

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Пусть требования, поступающие в систему, образуют простейший поток. Потоку Эрланга порядка *k* будет удовлетворять каждое k-ое из множества поступивших требований простейшего потока. То есть, поток Эрланга является «разряженным» простейшим потоком [3]. Например, если у поступивших по закону простейшего потока в СМО требований учитывать каждое второе, то получаем поток Эрланга 2-го порядка, с функцией распределения

$$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} - (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

В самом деле, пусть за время [0, t] должно поступить два события простейшего потока, оба с распределением $F_1(t)$, тогда, пользуясь сверткой, будем иметь

$$F_2(t) = \int_0^t 1 - F_1(t-\tau) d(1 - F(\tau)) = \lambda \int_0^t (1 - e^{-\lambda \cdot (t-\tau)}) e^{-\lambda\tau} d\tau =$$

$$1 - e^{-\lambda \cdot t} - (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \blacktriangledown$$

Следовательно, промежутки времени $T^{(2)}, T^{(3)}, \dots$ между поступлениями соседних требований, являются случайными с функцией распределения Эрланга 2-го порядка и равны $T^{(2)} = T_1 + T_2$, $T^{(3)} = T_3 + T_4 = \dots$

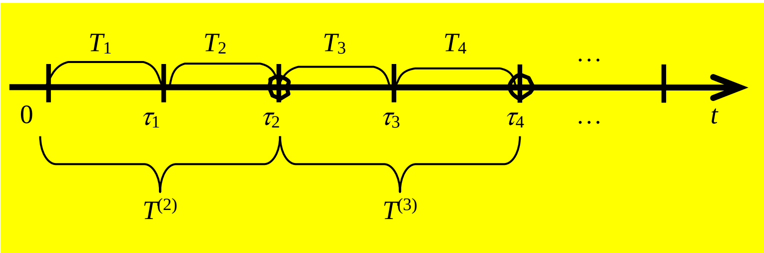

Рис. 3.7. Поток Эрланга порядка 2; учитываются $\tau_2, \tau_4, \dots$

Потоками Эрланга можно моделировать потоки Пальма с различным последействием.

В самом деле, при $k = 1$ имеем простейший поток (у него нет последействия). При увеличении k (до 10÷20) получаем поток Пальма с интервалами между поступлениями требований (как показывают многочисленные эксперименты) распределены практически нормально. При $k \to \infty$ получаем регулярный (не случайный) поток [3].

Требование ограниченности последействия слабее, чем отсутствие последействие и, тем самым, охватывает более широкий круг практических задач [3].

Для практического анализа важно знать, к какому виду можно отнести реальные потоки требований. В анализ входит нахождение функции распределения, управляющей входящим потоком и/или плотности, или числовыми характеристиками. Для этого необходимо:

а) выбрать интервал времени, в течение которого поток требований практически стационарный;

б) весь интервал разделить на достаточное число полуоткрытых непересекающихся промежутков, внутри каждого из которых подсчитывается число поступивших требований;

в) построить гистограмму и найти эмпирическую функцию распределения;

г) выдвинуть гипотезу о теоретическом аналоге эмпирического распределения;

д) используя критерий χ^2 (Пирсона) и/или Колмогорова сделать вывод о соответствии или несоответствии выдвинутой гипотезы данной выборке;

е) в случае отрицательного результата либо проверяется репрезентативность выборки, либо отвергается гипотеза.

Пример. В магазин «***Кор и Дор***» приходят потенциальные покупатели. Требуется проверить гипотезу о том, что входящий поток требований (покупателей) имеет распределение Пуассона.

Для этого проведем статистическое исследование, которое состоит в нахождении параметров эмпирической функции распределения и ее построении.

Уже, начиная с 1-го этапа, построение математической модели, существенно зависит от начальных условий, а именно, кого понимать под покупателями? Наиболее распространен случай, когда учитываются те посетители магазина, которые делают покупку. Именно его мы и рассмотрим.

Зададим временной интервал *T*, внутри которого зафиксированы моменты прихода каждого посетителя. Окончательно составляем выборку, в которой учтено только число посетителей магазина, которые сделали покупку. Используя статистические методы, временной интервал *T* делим на *n* интервалов, $t = T/n$

Обозначим через m_i число интервалов *t*, «содержащих» *i* покупателей (то есть, число временных промежутков длиной *t*, в каждый из которых пришло *i* покупателей).

Найдем среднее число покупателей, приходящихся на промежуток времени *t*:

$$\alpha t = \left(\sum_{i=1}^{r} i \cdot m_i \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \right), \qquad (3.45)$$

где *r* – номер интервала следующего за интервалом, которого нет (то есть, нет интервалов с числом покупателей более чем *r*).

Находим относительную частоту W_i числа *i* покупателей в интервале *i*

$$W_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{r} m_j}, \; i = 0,1,2,\ldots,r\,.$$

Вычисляем теоретические вероятности p_i того, что за промежуток времени *t* за покупками явилось *i* покупателей. В соответствии с пуассоновским процессом имеем:

$$p_i = \frac{(\alpha t)^i}{i!} \cdot e^{-\alpha t}, \; i = 0,1,2,\ldots,12\,.$$

Пусть время наблюдения составляет 300 мин. Весь интервал разобьем на $n = 100$ одинаковых полуоткрытых интервалов $t = 3$ мин.

Полученные значения сводим в табл. 3.7. Для заполнения четвертой колонки табл. 3.7 находим математическое ожидание числа пришедших покупателей за промежуток $t = 3$ мин. Из формулы (3.45) имеем:

$$\alpha.t = 4{,}6\,.$$

Таблица 3.7

№	число покупателей	число интервалов,	значение вероятностей	относительн ая частота,

	в интервале $t = 3$ мин	содержащих i покупателей, m_i	пуассоновского распределения, p_i	W_i
1	0	0	0,010	0,00
2	1	5	0,043	0,05
3	2	11	0,106	0,11
4	3	13	0,163	0,13
5	4	22	0,187	0,22
6	5	18	0,172	0,18
7	6	14	0,132	0,14
8	7	9	0,087	0,09
9	8	4	0,050	0,04
10	9	2	0,026	0,02
11	10	1	0,012	0,01
12	11	1	0,005	0,01
13	12	0	0,002	0,00

Применим критерий χ^2,

$$\chi^2 = n \cdot \sum_i (W_i - p_i)^2 / p_i \approx 3{,}84 .$$

Учитывая, что в распределении Пуассона один параметр, получаем степеней свободы $r = n - 1 - 1 = 12 - 1 = 11$.

По таблице для распределения χ^2 (**приложение 5**) определяем вероятность p того, что распределение является пуассоновским из уравнения

$$\chi^2(11, p) = 3{,}84 .$$

Окончательно получаем $p = 0{,}98$. Совпадение более чем хорошее!

Вывод. Гипотеза о пуассоновском распределении прихода покупателей в магазин не противоречит опытным данным и может быть принята.

Замечание. В рассмотренном примере интенсивность входящего потока требований $\alpha t = 4{,}6$. За единицу времени принят промежуток $t = 3$ мин. Обычно за временную единицу принимают стандартную, в нашем случае, $\alpha = 4{,}6/3 \approx 1{,}53$ 1/мин.

3.3.2 Время обслуживания (выходящий поток требований)

Время обслуживания $t_{обс}$ является важнейшей статистической характеристикой, поскольку определяет пропускную способность СМО. Обычно это случайная величина η с функцией распределения

$$F(t) = P\{\eta < t\} .$$

В практических приложениях наиболее распространен экспоненциальный закон обслуживания требований

$$F(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t) ,$$

где интенсивность $\beta = 1/t_{обс}$.

Время обслуживания требования $t_{обс}$ числено равно математическому ожиданию времени обслуживания.

Экспоненциальная функция распределения наиболее приближена к таким реальным случайным процессам, в которых большинство требований обслуживается быстро, что на практике не всегда выполняется.

Пусть в СМО, состоящую из n разнотипных приборов, поступает случайный поток требований, каждое из которых обслуживают все приборы. Если время обслуживания определяется экспоненциальным законом распределения с интенсивностью β_k и обслуживание требования заканчивается, если его обслуживание закончил первый из приборов обслуживания, то функция распределения будет экспоненциальной

$$F(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t) ,$$

где $\beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$.

В частности, если все обслуживающие устройства одинаковые, то их суммарная интенсивность (для экспоненциального закона) $\beta = n \cdot \beta_0$, где $\beta_0 = 1/t_{обс}$, $t_{обс}$ -

среднее время обслуживания требования любым из n устройств. Тогда

$$F(t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta_0 \cdot t),$$

то есть, при одинаковых обслуживающих устройствах среднее время обслуживания требования уменьшается в n раз, а дисперсия – в n^2 раз.

Это свойство справедливо **только** для экспоненциального распределения.

Более общим, является эрланговская функция распределения времени обслуживания (3.44).

Для стационарного режима функционирования СМО с отказами справедливы формулы Эрланга для любых функций распределения времени обслуживания требований [3].

Для большинства СМО суммарное время обслуживания требований образует входящий поток, поэтому его важность для СМО не так существенна, поскольку практически не влияет на ее функционирование.

Однако входящий поток сразу становится важным, если он сам является входящим для других приборов. Это **многофазовое** обслуживание: требование обслуживается последовательно, переходя от одного прибора к другому [14].

Если начальный поток требований пуассоновский, то, проходя последовательно через обслуживающие устройства, поток искажается, постепенно «усиливая» последействие.

Наличие и влияние последействия в потоке поступающих требований на вероятность отказа ему в дальнейшем обслуживании (или потери) доказана [4, 15]. Смысл этих теорем в том, что на каждый следующий прибор поступает поток требований все более искаженный (неудобным для описания). Возникает вероятность потери требования за счет того, что на последующие приборы поступают все те требования, которые поступали слишком быстро – одно за другим, следовательно, потоки, которым свойственны поступления за короткий срок сразу нескольких требований, становятся все более хаотичными.

3.3.3 Показатели эффективности

Под эффективностью функционирования СМО понимают числовые значения набора показателей (функций), характеризующих уровень выполнения заложенных в нее задач.

Ранее в ***МОДЕЛИ 1*** (рис. 3.5) были приведены показатели эффективности, количественно оценивающих СМО. Во многих СМО требуется использовать экономические показатели, например:

$q_{об}$ – стоимость обслуживания каждого требования в системе в единицу времени;

$q_{ож}$ – стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени;

$q_{у}$ – стоимость потерь, связанных с уходом требования из системы в единицу времени;

$q_{з}$ – стоимость эксплуатации каждого обслуживающего устройства в единицу времени;

$q_{пр}$ – стоимость простоя обслуживающего устройства в единицу времени.

При выборе оптимальных значений параметров СМО экономические показатели могут быть достаточно эффективны.

Можно использовать функцию потерь $G_{Э}$ за определенный временной промежуток T (например, месяц):

а) для систем с ожиданием

$$G_{Э} = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_{з} \cdot B_{з}) \cdot T, \qquad (3.46)$$

где A – средняя длина очереди, $B_{пр}$ - среднее число свободных приборов, $B_{з}$ - среднее число занятых приборов;

б) для систем с отказами (ограничения на длину очереди)

$$G_{Э} = (q_{у} \cdot p_{n} \cdot \alpha + q_{з} \cdot B_{з}) \cdot T\ ;$$

в) для смешанных систем

$$G_{Э} = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_{з} \cdot B_{з} + q_{у} \cdot p_{n} \cdot \alpha) \cdot T\ .$$

Можно применить показатель экономической эффективности системы

$$E = p_{обс} \cdot \alpha \cdot c \cdot T - G_Э ,$$

где c – экономический эффект, полученный при обслуживании каждого требования в единицу времени, $p_{обс}$ – вероятность обслуживания требования (для систем с отказами).

При анализе функционирования и определении sub-оптимального варианта в качестве параметров используются:

n – число приборов (обслуживающих устройств);

α – интенсивность входящего потока;

β – интенсивность обслуживания требований;

λ – интенсивность отказов обслуживающего устройства;

μ – интенсивность восстановления отказавшего устройства;

m – число восстанавливающих устройств в системе и др.

Приведем пример анализа эффективности работы конкретной модели.

4 Системы массового обслуживания с ожиданием

СМО с ожиданием можно разбить на две группы: замкнутые и разомкнутые.

Замкнутые системы всегда имеют ограниченный поток требований (например, выход прибора из строя и его восстановление). Разомкнутые системы предполагают, что источник входящих требований неиссякаемый (например, поток людей в метро, магазины, звонки на АТС, радиация и др.).

Рассмотрим СМО на применение ***МОДЕЛИ 1***, описывающую системы с ожиданием и с неиссякаемым потоком требований (рис. 3.5, с. 64).

Требуется проанализировать эффективность работы СМО, то есть, вычислить показатели эффективности, сформулированных в ***МОДЕЛИ 1***, которые дополним экономическим показателем - функции потерь $G_Э$ (3.46).

Пример. Станция «Железная дорога» в мегаполисе принимает составы для разгрузки угля на $n = 5$ платформах. В среднем за сутки на станцию прибывают 16 составов с углем. Поступление носит случайный характер. Плотность прихода составов показала, что поступление на разгрузку удовлетворяет пуассоновскому потоку с параметром $\alpha = 2/3$ состава в час. Время разгрузки состава является случайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем разгрузки $t_{cp} = 6$ час. Простой состава в сутки составляет $q_{ож} = 100$ у.е.; простой платформы в сутки за опоздание прихода состава – $q_{пр} = 1000$ у.е.; стоимость эксплуатации платформы в сутки – $q_з = 1000$ у.е. Издержки подсчитать за сутки. Требуется провести анализ эффективности функционирования станции.

Решение. Условие существования решения $\alpha/(n \cdot \beta) = 0{,}8 < 1$ выполнено. Имеем $n = 5$, $\alpha = 16$ 1/сутки, $\beta = 4$ 1/сутки. В соответствие модели, показателями эффективности являются (с.94, формулы ***модели 1***):

1). Вероятность того, что станция свободна

$$p_0 = 0{,}013.$$

Это означает, что в течение суток станция свободна ≈19 мин.

2). Вероятность того, что все платформы заняты

$$\Pi \approx 0{,}556.$$

То есть, около 13 ч 20 мин. в сутки все платформы заняты – это плохо.

3). Время ожидания разгрузки для каждого состава в среднем составляет $t_{ож} \approx 3$ ч. Ожидание разгрузки велико.

4). Вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего

$$P\{\tau > 3\} \approx 0{,}33,$$

то есть, каждый третий состав ожидает больше 3-х часов. Это плохо.

5). Средняя длина очереди

$$A \approx 10{,}1.$$

Очередь велика. Подъездные пути необходимо дублировать.

6). Среднее число занятых платформ

$$B \approx 4.$$

Платформа простаивает; это плохо.

7). Среднее число составов на станции

$$R = 14{,}1.$$

8). Среднее время нахождение состава на станции

$$L = t_{ож} + t_{ср} \approx 9{,}02\ .$$

9). Коэффициент загрузки станции

$$K_З = 0{,}80\ .$$

Загрузку можно увеличить.

10). Коэффициент простоя

$$K_{пр} = 0{,}20\ .$$

В среднем каждая платформа простаивает 20% времени.

Для изменения времени простоев будем варьировать число платформ $n = 5 \div 8$. Результаты расчетов сведем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№	показатели	платформы			
		5	6	7	8
1	p_0	0,013	0,017	0,180	0,182
2	$\prod$	0,555	0,290	0,136	0,058
3	$t_{ож}$, ч	3,300	0,870	0,270	0,090
4	A	11,100	1,740	0,420	0,120
5	R	15,100	4,420	3,760	3,760
6	B	1,000	2,000	3,000	3,960
7	$K_{пр}$	0,200	0,300	0,430	0,480

Из табл. 4.1 следует, что при числе платформ $n = 6$ почти в 4 раза снижается время ожидания разгрузки, а число составов, ожидающих разгрузки $10{,}1/1{,}74 \approx 5{,}8$, то есть, почти в 6 раз.

Дальнейшее увеличение числа платформ хотя и улучшает показатели, но для окончательного ответа оценим экономические показатели. Определим суммарные потери за сутки. За лучший (суб–оптимальный) вариант примем тот, для которого и издержки и ожидание меньшие.

Имеем из (3.46) $G_Э = \alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож} + K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр} + K_з \cdot n \cdot q_з$.

Результаты расчетов приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№	показатели	платформы

		5	6	7	8
1	$t_{ож}$, ч	3,30	0,87	0,27	0,09
2	$\alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож}$	6600	1740	540	180
3	$K_{пр}$	0,20	0,30	0,40	0,48
4	$K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр}$	1000	1800	3010	3840
5	$K_{з} \cdot n \cdot q_{з}$	4000	4800	5600	6400
6	$G_{Э}$	11600	8340	11150	10420

Из таблицы следует, что наиболее экономичным оказался вариант с 6 платформами, но лучшим следовало бы считать вариант с 7 платформами.

Были подсчитаны свои затраты, на которые по закону можно сделать торговую наценку 25-30 %, из которой платят налоги, зарплату и т.д., а она больше для 7 платформ. Кроме того, время ожидания разгрузки сократилось почти втрое, за счет оборота. Это хорошо и для клиентов. Выбор первого варианта неразумен, поскольку можно все потерять на штрафах за простои.

5 Модели систем массового обслуживания для выполнения работы

5.1 Оформление и содержание работы

Работа выполняется на стандартном листе формата А4 с текстом, набранном на компьютере с общим объемом не менее 10 стр. и включает в себя

- титульный лист (1 с.);
- оглавление (1 с.);
- введение (1,5 – 2 с.);
- постановку задачи (0,25 с.);
- математическую модель (1,5 – 2 с.);
- расчеты (программу) и числовые результаты (3 – 5 с.);
- анализ результатов (1 с.);
- варианты расчетов и выводы (1 – 2 с.),
- литературу.

Титульный лист.

Образец титульного листа приведен в **приложении 9**.

Введение.

Введение состоит из вводной части описания отрасли промышленности или сельского хозяйства, к которым относится поставленная задача. Дается ее общая характеристика. Обосновывается необходимость применения математического аппарата ТМО, как одного из возможных подходов к анализу эффективности функционирования изучаемого объекта. Приводятся примеры реальных задач, в которых может быть использована выбранная модель.

Постановка задачи.

Состоит из словесной формулировки функционального состояния объекта без математической терминологии с указанием значений параметров (числа приборов, параметров входящего потока (или отказов), времени обслуживания (или восстановлений)). Задаются значения (в рублях) потерь от эксплуатации, простоев и прочих отдельных элементов изучаемого объекта (см п.4).

Математическая модель.

Выбранная математическая модель переписывается из пособия (вместе с показателями эффективности и экономическим показателем) и дополняется числовыми значениями параметров одинаковой размерности (см п.5.2).

Расчеты и числовые результаты.

Прилагается компьютерная программа и числовые значения показателей эффективности с объяснением введенных обозначений. Если программа отсутствует, то выполняется подробный ручной расчет показателей эффективности, не менее трех вариантов (обычно изменяется число обслуживающих устройств).

Анализ результатов.

По каждому показателю эффективности необходимо привести личные комментарии о его значимости, связи с другими показателями и отметить недостатки (см п.4).

Выводы.

Отдельно от анализа. Содержат перерасчет для других значений параметров (обычно это n), повышающих эффективность работы изучаемого объекта, если такое возможно. За окончательный результат взять тот, который, например, минимизирует потери. Приводится обоснование выбора.

5.2 Примеры моделей СМО

Модель 1 (системы с ожиданием $0{,}92 < \alpha/(n\cdot\beta) < 1$ ***)***

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание интенсивностью α. Время обслуживания каждого требования случайное с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью обслуживания β. Если требование, поступившее в систему, застает все приборы занятыми, то оно встает в очередь и ждет до тех пор, пока прибор не освободится. В каждый момент времени любой прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,\ldots$.

В соответствие модели имеем размеченный граф состояний СМО:

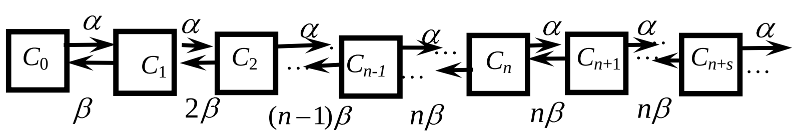

Рис. 5.1

По данному графу получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$-\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 = 0,$$

$$-(\alpha + k\cdot\beta)\cdot p_k + \alpha\cdot p_{k-1} + (k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1} = 0,$$
$$0 < k \le n-1,$$
$$-(\alpha + n\cdot\beta)\cdot p_n + \alpha\cdot p_{k-1} + n\cdot\beta\cdot p_{k+1} = 0,\ k \ge n.$$

Для того, чтобы система имела единственное решение, добавим условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

которое является естественным следствием модели.

Таким образом, при естественном ограничении $0.92 < \alpha/(n\cdot\beta) < 1$ решение системы линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\cdot\frac{1}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases}\dfrac{(\alpha/\beta)^k}{k!}\cdot p_0, & k = 1,2,\ldots,n-1;\\[2mm] \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{n!\cdot n^{k-n}}\cdot p_0, & k = n, n+1,\ldots.\end{cases}$$

Определим показатели эффективности функционирования СМО

1) p_0 – вероятность того, что все приборы свободны:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\cdot\frac{1}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\right)^{-1},$$
$$(0.92 < \alpha/(n\cdot\beta) < 1);$$

2) p_k – вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием k приборов (то есть, в системе находится k заявок):

$$p_k = (\alpha/\beta)^k\cdot\frac{1}{k!}\cdot p_0,\ k = 1,2,\ldots,n-1;$$

3) Π – вероятность того, что все приборы системы заняты ($k \ge n$):

$$\Pi = \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\cdot p_0\,;$$

4) p_{n+s} – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s заявок в очереди:

$$p_{n+s} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n!\cdot n^s}\cdot p_0\,,\ s = 0,1,\ldots\ ;$$

5) $t_{ож}$ – среднее время, в течение которого требование ждет начала обслуживания:

$$t_{ож} = \frac{\Pi}{n\cdot\beta-\alpha}\,;$$

6) вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего $t_{ож}$:

$$P\{\tau > t_{ож}\} = \Pi\cdot\exp(-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_{ож});$$

7) A – средняя длина очереди:

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} s\cdot p_{n+s}\ \text{ или }\ A = \frac{(\alpha/(n\cdot\beta))\cdot p_n}{(1-\alpha/(n\cdot\beta))^2}\,;$$

8) B – среднее число требований, находящихся в системе:

$$B = A + \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot p_k + n\cdot\Pi\ \text{ или}$$

$$B = A + \frac{n\cdot p_n}{1-\alpha/(n\cdot\beta)} + p_0\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\alpha/\beta)^k}{(k-1)!}\,;$$

9) $\aleph_0$ – среднее число свободных приборов

$$\aleph_0 = p_0\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k\,;$$

10) $\aleph_з$ – среднее число приборов, занятых обслуживанием:

$$\aleph_з = n - \aleph_0\,;$$

11) $K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \aleph_0 / n\,;$$

12) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \aleph_з / n;$$

13) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период *T*:

$$G_Э = T \cdot (A \cdot q_1 + \aleph_0 \cdot q_2 + \aleph_з \cdot q_3),$$

q_1 – стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди, в единицу времени;
q_2 – стоимость потерь за простой обслуживающего устройства в единицу времени;
q_3 – стоимость эксплуатации прибора при обслуживании требований в единицу времени.

Замечание. Пусть вы открываете предприятие и хотите узнать свои потери. Они должны быть учтены в трех показателях (q_1, q_2, q_3), поэтому, например, в q_1 можно учесть оформление полок, расположение товаров, ценники и др. Следует помнить, что неудачно оцененные потери могут привести к неверным выводам. При выборе лучшего варианта не забывайте о своей торговой наценке – это ваша прибыль 20 – 30% и комфортные условия для покупателей. Чем выше свои потери, тем больше прибыль – и все по закону!

Модель 2 (системы с ограниченным временем ожидания).

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований двух видов на обслуживание интенсивностью α_1 и α_2, соответственно. Поступившее в систему требование 1-го вида может покинуть систему только после обслуживания, а требование 2-го вида, застав все приборы занятыми, сразу покидает систему. Время обслуживания любых требований является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,2,\ldots$.

В соответствие с моделью имеем размеченный граф состояний системы:

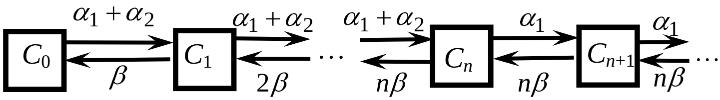

Рис. 5.2

Для нахождения вероятностей p_k из графа состояний получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$-(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 = 0,$$

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + k \cdot \beta) \cdot p_k + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot p_{k-1} + (k + \beta) \cdot p_{k+1} = 0, \quad 0 < k \le n,$$

$$-(\alpha_1 + n \cdot \beta) \cdot p_n + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot p_{n-1} + n \cdot \beta \cdot p_{n+1} = 0,$$

$$-(\alpha_1 + n \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha_1 \cdot p_{k-1} + n \cdot \beta \cdot p_{k+1} = 0, \; k > n .$$

Условие нормировки, являющееся следствием модели, имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 .$$

Система уравнений с учетом условия нормировки имеет единственное решение:

$$p_0 = \frac{n - \lambda_1}{(n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n) \cdot D_n};$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(n - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)^k \cdot D_n}{(n - \lambda_1 + \lambda_2 \cdot E_n) \cdot k!}, & 0 < k \le n; \\[2ex] \dfrac{(n - \lambda_1) \cdot E_n}{n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n} \cdot \left(\dfrac{\lambda_1}{n} \right)^{k-n}, & k > n, \end{cases}$$

где $\lambda_1 = \alpha_1 / \beta$, $\lambda_2 = \alpha_2 / \beta$,

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}, \ E_n = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{D_n \cdot n!}.$$

Используя вероятности p_k, получим следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 – вероятность того, что в СМО нет требований:

$$p_0 = \frac{n - \lambda_1}{(n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n) \cdot D_n};$$

2) p_k – вероятность того, что k приборов занято обслуживанием, $0 < k \le n$:

$$p_k = \frac{(n - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)^k \cdot D_n}{(n - \lambda_1 + \lambda_2 \cdot E_n) \cdot k!};$$

3) p_k – вероятность того, что k требований находится в системе, при условии $k > n$:

$$p_k = \frac{(n - \lambda_1) \cdot E_n}{n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{n} \right)^{k-n};$$

4) $p_{отк}$ – вероятность потери требования:

$$p_{отк} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{n \cdot E_n}{n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n};$$

5) $P\{\tau_1 > t\}$ – вероятность того, что время ожидания τ_1 требования 1-го типа больше заданного t:

$$P\{\tau_1 > t\} = p_{отк} \cdot \exp\left(-(n - \lambda_1 \alpha) \cdot \beta \cdot t\right);$$

6) $t_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания требованием 1-го типа:

$$t_{ож} = \frac{p_{отк}}{\beta \cdot (n - \lambda_1)};$$

7) $\aleph_з$ – среднее число занятых приборов:

$$\aleph_з = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot p_k;$$

8) $\aleph_c$ – среднее число свободных приборов

$$\aleph_c = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot p_k \ ;$$

9) K_{np} – коэффициент простоя приборов:

$$K_{np} = \frac{\aleph_c}{n} \ ;$$

10) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{\aleph_з}{n} \ ;$$

11) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T \cdot (\alpha_2 \cdot p_{отк} \cdot q_1 + \aleph_p \cdot q_2 + \aleph_c \cdot q_3) \ ,$$

q_1 – упущенная выгода от потери требования в единицу времени;
q_2 – потери от простоя обслуживающего прибора в единицу времени;
q_3 – потери, связанные с эксплуатацией прибора в единицу времени.

Модель 3 (системы с ограничением на длину очереди).

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований интенсивностью α. Каждое вновь поступившее требование, застав все приборы занятыми, становится в очередь, тогда и только тогда, когда в ней находится менее m требований, иначе теряется. Время обслуживания каждого требования случайное, распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования такой СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k) $k = 0,1,2,...,n+m$.

Запишем функционирование СМО в виде размеченного графа состояний:

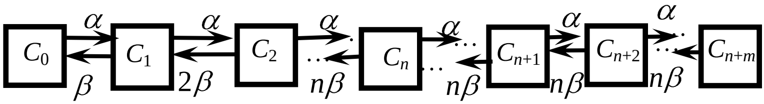

Рис. 5.3

Для стационарного режима, на основании метода декомпозиции, получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$-\alpha\cdot p_0+\beta\cdot p_1=0,$$

$$-(\alpha+k\cdot\beta)\cdot p_k+\alpha\cdot p_{k-1}+(k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1}=0,$$

$$0<k\le n-1,$$

$$-(\alpha+n\cdot\beta)\cdot p_{n+s}+\alpha\cdot p_{n+s-1}+n\cdot\beta\cdot p_{n+s+1}=0,\ 0\le s<m,$$

$$-n\cdot\beta\cdot p_{n+m}+\alpha\cdot p_{n+m-1}=0.$$

Для того, чтобы решение системы было единственным, добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n+m}p_k=1.$$

Исходя из найденных значений вероятностей p_k, имеем следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 – вероятность того, что СМО свободна:

$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k+\frac{(\alpha/\beta)^n}{n!}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\alpha/\beta}{n}\right)^k\right)^{-1};$$

2) p_k – вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием k приборов:

$$p_k=\frac{(\alpha/\beta)^k}{k!}\cdot p_0,\ k=1,2,...,n;$$

3) p_{n+s} – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s требований находятся в очереди:

$$p_{n+s}=\frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n!\cdot n^s}\cdot p_0,\ s=0,1,...,m;$$

4) $p_{отк}$ – вероятность отказа требованию в обслуживании:

$$p_{отк} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+m}}{n!\cdot n^m}\cdot p_0;$$

5) $B_з$ – среднее число требований, занятых обслуживанием:

$$B_з = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k + n\cdot\sum_{k=1}^{m} p_{n+k};$$

6) B_c – среднее число свободных приборов:

$$B_c = n - B_з;$$

7) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{B_з}{n};$$

8) $K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \frac{B_c}{n};$$

9) A – средняя длина очереди:

$$A = \sum_{k=1}^{m} k\cdot p_{n+k};$$

10) $G_Э = T\cdot(\alpha\cdot p_{отк}\cdot q_0 + B_з\cdot q_з + B_c\cdot q_c)$,

q_0 – стоимость потерь, связанных с отказом требованию в обслуживании (упущенная выгода) в единицу времени;

$q_з$ – стоимость потерь, связанных с эксплуатацией прибора в единицу времени;

q_c – стоимость потерь, связанных с простоем прибора в единицу времени;

T – отчетный период (обычно месяц).

Данная модель может быть использована при анализе эффективности работы предприятий из сферы бытового обслуживания с нетерпеливыми клиентами.

Модель 4 (замкнутые системы, анализ).

СМО состоит из n идентичных приборов, каждый из которых выходит из строя в случайные моменты времени с интенсивностью λ. В случае выхода прибора из строя он начинает сразу восстанавливаться одним из m свободных восстанавливающих устройств (ВУ) с интенсивностью μ. Если все ВУ заняты, то прибор встает в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится ВУ. Каждое ВУ в любой момент времени может восстанавливать не более одного прибора. Требуется оценить надежность работы системы и дать предложения по повышению эффективности ее функционирования.

Обозначим через p_k – вероятность того, что k приборов находятся в состоянии отказа (состояние C_k). Представим модель в виде размеченного графа состояний СМО:

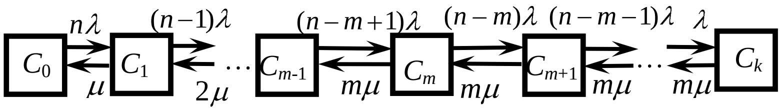

Рис. 5.4

По графу состояний записываем систему однородных алгебраических уравнений:

$$n\cdot\lambda\cdot p_0-\mu\cdot p_1=0,$$
$$(n-k)\cdot\lambda\cdot p_{k-1}-k\cdot\mu\cdot p_k=0,\ 1<k\le m,$$
$$(n-k\cdot\lambda)\cdot p_{k-1}-m\cdot\mu\cdot p_k=0,\ m<k<n,$$
$$\lambda\cdot p_{n-1}-m\cdot\mu\cdot p_n=0.$$

Для единственности решения системы уравнений добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=1.$$

Тогда решение системы запишется в виде:

$$p_0=\left(n!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!\cdot(n-i)!}+\frac{n!}{m!}\cdot\sum_{i=m+1}^{n}\frac{(\lambda/\mu)^i}{(n-i)!\cdot m^{i-m}}\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot\delta_m^k}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\cdot p_0 \text{, где } \delta_m^k = \begin{cases} k!, & k \le m; \\ m!\cdot m^{n-k}, & m < k \le n. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие показатели эффективности:

1) p_0 – вероятность того, что СМО свободна (все приборы работают);

2) p_k – вероятность того, что n приборов k находятся в состоянии отказа;

3) B – среднее число работающих приборов:

$$B = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\cdot p_k \text{ ;}$$

4) D – среднее число неработающих приборов:

$$D = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k \text{ ;}$$

5) K_{np} – коэффициент надежности системы:

$$K_{np} = \frac{M}{n} \text{ ;}$$

6) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T\cdot\left(c_1\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}(n-k)\cdot p_k + c_2\cdot\sum_{k=n-m}^{n}(m+k-n)\cdot p_k\right),$$

где c_1 – стоимость часа полезного времени работы машины;

c_2 – стоимость часа содержания восстанавливающего устройства.

Модель 5 (замкнутые системы, синтез).

Имеется непрерывно работающий прибор, состоящий из m модулей. В процессе работы прибора модули могут выходить из строя в случайные моменты времени. Время наработки машины на отказ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и параметром $\lambda = 1/t_{cp}$, t_{cp} – среднее время работы машины до отказа.

В случае выхода модуля из строя он мгновенно заменяется одним из n запасных, если таковой имеется, иначе прибор останавливается. Вышедший из строя модуль попадает в ремонт, где восстанавливается одним из r восстанавливающих устройств (операторов). Время восстановления является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью восстановления $\mu = 1/t_{обс}$, $t_{обс}$ - среднее время восстановления одного модуля. Восстановленные модули возвращаются в резерв. Требуется оценить эффективность работы прибора.

Пусть p_k – вероятность того, что в приборе k неисправных модулей (состояние C_k), $k = 0,1,\ldots n$, а p_{n+1} – вероятность того, что прибор не может работать (отсутствуют исправные модули для замены вновь вышедшего – состояние C_{n+1}). Построим размеченный граф возможных состояний прибора (рис. 5.5),

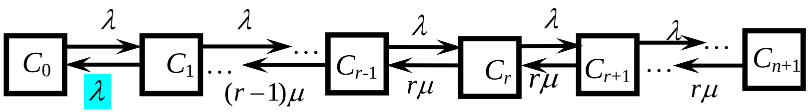

Рис. 5.5

из которого получаем систему однородных алгебраических уравнений:

$$-\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0,$$
$$-(\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0,\ 0 < k < r-1,$$
$$-(\lambda + r \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + r \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0,\ r \le k < n+1,$$
$$-r \cdot \mu \cdot p_{n+1} + \lambda \cdot p_n = 0.$$

Условие нормировки, являющееся следствием модели, имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1.$$

Решая систему (с учетом условия нормировки), получаем:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \cdot \sum_{k=1}^{n-r+1} \left(\frac{\lambda}{r \cdot \mu} \right)^k \right)^{-1} ;$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \cdot p_0 ,\ 1 \le k < r ;$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^{k+r}}{r! \cdot r^{k-r}} \cdot p_0 ,\ r \le k \le n+1 .$$

Вычислим показатели эффективности, исходя из найденных вероятностей:

1) p_0 – вероятность того, что все n занятых модулей прибора в исправном состоянии;

2) $p_{отк}$ – вероятность того, что прибор не будет работать

$$p_{отк} = \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{r! \cdot r^{n-r+1}} \cdot p_0 ;$$

3) $\aleph$ – среднее число модулей, находящихся в ремонте, при бесперебойной работе прибора:

$$\aleph = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k ;$$

4) $\aleph_o$ – среднее число операторов занятых восстановлением модулей:

$$\aleph_o = \sum_{k=1}^{r} k \cdot p_k + r \cdot \sum_{k=r+1}^{n+1} p_k ;$$

5) $K_з$ – коэффициент загрузки операторов:

$$K_з = \frac{\aleph_o}{r} ;$$

6) M – среднее число модулей, ожидающих ремонта:

$$M = \sum_{k=r+1}^{n+1} (k-r) \cdot p_k .$$

Для определения экономически целесообразного числа запасных модулей и числа восстанавливающих устройств (операторов) воспользуемся формулой, минимизирующей потери при эксплуатации прибора:

$$\min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot \left(\text{[illegible]} \cdot c_{оп} + c_{пр} \cdot p_{отк} \right),$$

где $c_з$ – стоимость запасных модулей;

$c_{оп}$ – стоимость содержания одного восстанавливающего устройства в единицу времени;

$c_{пр}$ – стоимость простоя прибора в единицу времени;

$T_{зап}$ – среднее время работы запасного модуля.

Если число восстанавливающих устройств фиксировано, то $c_{оп} = 0$. Тогда формула

$$\min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot c_{пр} \cdot p_{отк}$$

определяет оптимальное число запасных модулей (обеспечивающих минимум потерь из-за простоя прибора и затрат на покупку запасных модулей).

Модель может быть использована для анализа и синтеза ненадежных систем, состоящих из большого числа однотипных элементов: вычислительные системы; парк автобусов, трамваев; предприятия общественного питания и магазины бытовой техники (планирование необходимого количества запасных частей для продажи, сервисных центров и т.д.).

Приложение 1

Значения функции $V_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ (распределение Пуассона)

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001

Продолжение приложения 1

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

Приложение 2

Значения функции Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,1	0,3968	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3907	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3809	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3677	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3514	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3325	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3115	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2890	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2654	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2413	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2173	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1937	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1709	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1494	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1292	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127

Продолжение приложения 2

1,6	0,1107	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0939	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0788	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0655	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0539	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0439	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0354	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006

Продолжение приложения 2

3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 3

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt$

$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, для $x < -3{,}98 \Rightarrow \Phi(x) = 0$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170

Продолжение приложения 3

-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2	0,0139	0,0139	0,0132	0,0139	0,0125	0,0119	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

Продолжение приложения 3

-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 4

Значения $K(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\cdot e^{-2k^2\cdot z^2}$, $z>0$ (распределение Колмогорова)

(для $z<0{,}28 \Rightarrow K(z)=0$ $K(z)$=0, для $z>3 \Rightarrow K(z)=1$)

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
0,28	0,000001	0,42	0,005476	0,56	0,087577
0,29	0,000004	0,43	0,007377	0,57	0,098656
0,30	0,000009	0,44	0,009730	0,58	0,110395
0,31	0,000021	0,45	0,012590	0,59	0,122760
0,32	0,000046	0,46	0,016005	0,60	0,135718
0,33	0,000091	0,47	0,020022	0,61	0,149229
0,34	0,000171	0,48	0,024682	0,62	0,163225
0,35	0,000303	0,49	0,030017	0,63	0,177753
0,36	0,000511	0,50	0,036055	0,64	0,192677
0,37	0,000826	0,51	0,042814	0,65	0,207987
0,38	0,001285	0,52	0,050306	0,66	0,223637
0,39	0,001929	0,53	0,058534	0,67	0,239582
0,40	0,002808	0,54	0,067497	0,68	0,255780
0,41	0,003972	0,55	0,077183	0,69	0,272189

Продолжение приложения 4

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
0,75	0,372833	0,95	0,672516	1,15	0,858038
0,76	0,389640	0,96	0,684636	1,16	0,864442
0,77	0,406372	0,97	0,696444	1,17	0,870612
0,78	0,423002	0,98	0,707940	1,18	0,876548
0,79	0,439505	0,99	0,719126	1,19	0,882258
0,80	0,455857	1,00	0,730000	1,20	0,887750
0,81	0,472041	1,01	0,740566	1,21	0,893030
0,82	0,488030	1,02	0,750826	1,22	0,898104
0,83	0,503808	1,03	0,760780	1,23	0,902972
0,84	0,519366	1,04	0,770434	1,24	0,907648
0,85	0,534682	1,05	0,779794	1,25	0,912132
0,86	0,549744	1,06	0,788860	1,26	0,916432
0,87	0,564546	1,07	0,797636	1,27	0,920556
0,88	0,579070	1,08	0,806128	1,28	0,924505
0,89	0,593316	1,09	0,814342	1,29	0,928288
0,90	0,607270	1,10	0,822282	1,30	0,931908
0,91	0,620928	1,11	0,829950	1,31	0,935370
0,92	0,634286	1,12	0,837356	1,32	0,938682
0,93	0,647338	1,13	0,844502	1,33	0,941848
0,94	0,660082	1,14	0,851394	1,34	0,944872

Продолжение приложения 4

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
1,35	0,947756	1,54	0,982578	1,73	0,994972
1,36	0,950512	1,55	0,983622	1,74	0,995309
1,37	0,953142	1,56	0,984610	1,75	0,995625
1,38	0,955650	1,57	0,985544	1,76	0,995922
1,39	0,958040	1,58	0,986426	1,77	0,996200
1,40	0,960318	1,59	0,987260	1,78	0,996460
1,41	0,962486	1,60	0,988048	1,79	0,996704
1,42	0,964552	1,61	0,988791	1,80	0,996932
1,43	0,966516	1,62	0,989492	1,81	0,997146
1,44	0,968382	1,63	0,990154	1,82	0,997346
1,45	0,970158	1,64	0,990777	1,83	0,997533
1,46	0,971846	1,65	0,991364	1,84	0,997707
1,47	0,973448	1,66	0,991917	1,85	0,997870
1,48	0,974970	1,67	0,992438	1,86	0,998023
1,49	0,976412	1,68	0,992928	1,87	0,998145
1,50	0,977782	1,69	0,993389	1,88	0,998297
1,51	0,979080	1,70	0,993828	1,89	0,998421
1,52	0,980310	1,71	0,994230	1,90	0,998536
1,53	0,981476	1,72	0,994612	1,91	0,998644

Продолжение приложения 4

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
1,92	0,998744	2,11	0,999723	2,30	0,999949
1,93	0,998837	2,12	0,999750	2,31	0,999954
1,94	0,998924	2,13	0,999770	2,32	0,999958
1,95	0,999004	2,14	0,999790	2,33	0,999962
1,96	0,999079	2,15	0,999806	2,34	0,999965
1,97	0,999149	2,16	0,999822	2,35	0,999968
1,98	0,999213	2,17	0,999838	2,36	0,999970
1,99	0,999273	2,18	0,999852	2,37	0,000073
2,00	0,999329	2,19	0,999864	2,38	0,000076
2,01	0,999380	2,20	0,999874	2,39	0,000078
2,02	0,999428	2,21	0,999886	2,40	0,000080
2,03	0,999474	2,22	0,999896	2,41	0,999982
2,04	0,999516	2,23	0,999904	2,42	0,999984
2,05	0,999552	2,24	0,999912	2,43	0,999986
2,06	0,999588	2,25	0,999920	2,44	0,999987
2,07	0,999620	2,26	0,999926	2,45	0,999988
2,08	0,999650	2,27	0,999934	2,46	0,999989
2,09	0,999680	2,28	0,999940	2,47	0,999990
2,10	0,999705	2,29	0,999944	2,48	0,999991

Продолжение приложения 4

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
2,49	0,999992	2,65	0,9999984	2,85	0,99999982
2,50	0,9999925	2,70	0,9999990	2,90	0,99999990
2,55	0,9999956	2,75	0,9999994	2,95	0,99999994
2,60	0,9999974	2,80	0,9999997	3,00	0,99999997

Приложение 5

Значения χ^2 решения уравнения

$$2^{(1-n)/2} \cdot \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \int_0^{\chi^2} x^{((n-1)/2-1)} \cdot \exp(-x/2)dx = p,$$

для левого конца интервала при $2p = 1 - \beta$, значение $\chi^2 = \chi_1^2$,

для правого конца интервала при $p = 1 - (1-\beta)/2$, значение $\chi^2 = \chi_1^2$.

r \ *p*	**0,99**	**0,98**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3

Продолжение приложения 5

r \ *p*	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	.8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Приложение 6

Значения t_β, удовлетворяющие равенству $2\int_0^{t_\beta} S_n(t)dt = \beta$, в зависимости от β и $n-1$

n-1 \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71	5,96
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	130	262	399	546	706	889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	129	260	396	540	697	876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	128	259	394	538	694	870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	128	258	393	536	691	866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07

Продолжение приложения 6

n-1 \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	128	257	392	534	689	863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	127	257	392	534	688	862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	127	257	391	533	688	861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	127	257	391	533	687	860	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	127	257	391	532	686	859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	127	256	390	532	686	858	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	127	256	390	532	685	858	1,060	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	127	256	390	531	685	857	1,059	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	127	256	390	531	684	856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	127	256	390	531	684	856	1,058	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	127	256	389	531	684	855	1,057	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	127	256	389	530	683	855	1,056	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	127	256	389	530	683	854	1,055	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	127	256	389	530	683	854	1,055	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	126	255	388	529	681	851	1,050	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	126	254	387	527	679	848	1,046	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	126	254	386	526	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Приложение 7

Операционное исчисление (основные понятия)

Пусть $f(t)$ непрерывная функция действительного переменного $t \geq 0$, удовлетворяющая условию

$$| f(t)| < M \cdot e^{-r_0 \cdot t}, \ \forall t \in [0, \infty), \tag{3}$$

где M, r_0 – постоянные числа.

Функция $F(s)$, комплексного переменного s, называется **изображением Лапласа**, если она определена формулой

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt, \tag{4}$$

функция $f(t)$ называется **оригиналом.**

Стандартная запись изображения:

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ или } f(t) \leftarrow F(s). \tag{5}$$

Рассмотрим несколько необходимых нам изображений.

1). Изображение функции Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, \text{ для } t < 0; \\ 1, \text{ для } t \geq 0. \end{cases}$$

$$L\{\chi(t)\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} dt = \frac{1}{s},$$

то есть

$$1 \leftarrow \frac{1}{s}.$$

2). Изображение функции $e^{-\alpha \cdot t}$

$$L\{e^{-\alpha \cdot t}\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot e^{-\alpha \cdot t} dt = \frac{1}{s + \alpha},$$

то есть

$$e^{-\alpha \cdot t} \leftarrow \frac{1}{s + \alpha}.$$

3). Изображение функции $t^{k-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$

$$L\{t^{k-1}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\}=\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot t^{k-1}\cdot e^{-\alpha\cdot t}dt=\frac{(k-1)!}{(s+\alpha)^k},\ k\in N.$$

4). Изображение производных.

Пусть $F(s)\to f(t)$, тогда

$$\frac{d}{dt}f(t)\leftarrow(s\cdot F(s)-f(0)).$$

В самом деле, имеем

$$L\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f'(t)dt=e^{-st}\cdot f(t)\Big|_0^\infty+s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f(t)dt.$$

В силу (3) $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-s\cdot t}\cdot f(t)=0$, отсюда,

$$L\{f'(t)\}=-f(0)+s\cdot F(s).$$

Свойства преобразования Лапласа.

1). Линейность:

если $F_i(s)=L\{f_i(t)\}$, то $\forall\alpha_i\in R$, $i=1,2,...,n$,

$$L\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot f_i(t)\right\}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot F_i(s);$$

2). Смещение:

если $F(s)=L\{f(t)\}$, то

$$F(s+\lambda)\to e^{-\lambda\cdot t}\cdot f(t),\ \forall\lambda,\ \lambda-const;$$

3). Свертывание:

если $F_1(s)=L\{f_1(t)\}$, $F_2(s)=L\{f_2(t)\}$, то

$$F_1(s)\cdot F_2(s)\to f_1*f_2(t),$$ где

$$f_1*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau. \qquad (6)$$

4). Запаздывание:

если $F(s)=L\{f(t)\}$, то

$$e^{-s\cdot\tau}\cdot F(s)\leftarrow f_\tau(t),$$

где $f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau, \tau>0;\\ f(t-\tau), & t\ge\tau.\end{cases}$

Замечание. Выражение (6) называется сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ [14] и играет большую роль при изучении многомерных распределений (сравни с формулой (3.27)).

Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом

Метод наиболее эффективен при решении рекуррентных систем уравнений. Продемонстрируем его на примере системы (3.30).

Имеем

$$\frac{dV_0(t)}{dt}=-\lambda\cdot V_0(t)\,,\ \frac{dV_k(t)}{dt}=-\lambda\cdot V_k(t)+\lambda\cdot V_{k-1}(t)\,,\ k\in N\,,$$

при $V_0(0)=1$, $V_k(0)=0$

Пусть $F_k(s)\to V_k(t)$. Взяв преобразование Лапласа, с учетом изображения производных и свойства линейности, получаем

$$s\cdot F_0(s)-1=-\lambda\cdot F_0(s),\ s\cdot F_k(s)-1=-\lambda\cdot F_k(s)+\lambda\cdot F_{k-1}(s)\,.$$

После элементарных преобразований получаем

$$F_0(s)=\frac{1}{s+\lambda}\,,\ F_k(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda}\cdot F_{k-1}(s)\,.$$

Отсюда

$$F_k(s)=\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^{k+1}}\,.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся изображением 3 (функции $t^{k-1}\cdot e^{-\alpha\cdot t}$). Окончательно получаем

$$V_k(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda\cdot t}\,,\ k=0,1,...\ \ .$$

Приложение 8
Производящие функции

Метод производящих функций относится к операционным методам. Производящие функции являются дискретным аналогом более общего класса функций – характеристических [15]. Широко используются в теории вероятностей. Впервые были применены для решения уравнений А. Муавром и П.С. Лапласом.

Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_k(t)\}$, $k = 0,1,...$. производящей назовем функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot f_k(t).$$

Если $F(z,t)$ известна, то

$$f_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(0,t)}{\partial z^k}.$$

Пусть имеем распределение вероятностей $\{p_k(t)\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$, $p_0(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ и пусть $F(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot p_k(t)$.

С учетом условий, наложенных на $p_k(t)$, имеем

$$F(0,t) = p_0(t),\ F(1,t) = 1,\ F(z,0) = 1,\ p_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(0,t)}{\partial z^k}.$$

Математическое ожидание, очевидно, находится по формуле

$$M(t) = \frac{\partial F(1,t)}{\partial z}.$$

Применим производящие функции для нахождения решения системы дифференциальных уравнений в переходном режиме модели 4, для случая $m = n$.

Пусть $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t в СМО k приборов из n находятся в состоянии отказа, при условии, что в начальный момент времени все приборы были исправны, то есть,

$$p_0(0)=1,\ p_k(0)=0,\ k=1,2,...,n.$$

Система дифференциальных уравнений, составленная по модели 4, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_0(t)=-n\cdot\lambda\cdot p_0(t)+\mu\cdot p_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}p_k(t)=-[(n-k)\cdot\lambda+k\cdot\mu]\cdot p_k(t)+(n-k+1)\cdot\lambda\cdot p_{k-1}(t)+ \\ +(k+1)\cdot\mu\cdot p_{k+1}(t), \qquad\qquad 1\le k<n, \\ \dfrac{d}{dt}p_n(t)=-n\cdot\mu\cdot p_n(t)+\lambda\cdot p_{n-1}(t). \end{cases}$$

Для решения введем производящую функцию

$$F(z,t)=\sum_{k=0}^{n} z^k\cdot p_k(t).$$

Умножая уравнение k, $k=0,1,...,n$, системы на z^k, суммируя их и приводя подобные члены, с учетом того, что

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{n} z^k\cdot\frac{d}{dt}p_k(t),\ \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot z^{k-1}\cdot p_k(t),$$

получаем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}+(z-1)\cdot(\lambda\cdot z+\mu)\cdot\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=n\cdot\lambda\cdot(z-1)\cdot F(z,t),$$

$$F(z,0)=1.$$

Решим его методом характеристик [14].

Имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{(z-1)(\lambda\cdot z+\mu)}=\frac{dF(z,t)}{n\cdot\lambda\cdot(z-1)\cdot F(z,t)}.$$

Решая любые два из них, получаем

$$F(z,t)\cdot(\lambda\cdot z+\mu)^{-n}=q\left(\frac{\lambda\cdot z+\mu}{1-z}\cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t}\right),$$

где $q(x)$ - произвольная дифференцируемая функция (представляющая семейство поверхностей $q(z,t)=c$).

Учитывая начальные условия, $F(z,0)=1$, получаем

$$F(z,t)=[1-r(t)\cdot(1-z)]^n .$$

Далее имеем

$$p_k(t)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{\partial^k}{\partial z^k}(1-r(t)\cdot(1-z))^n\ ,\ M(t)=\left.\frac{\partial(1-r(t)\cdot(1-z))^n}{\partial z}\right|_{z=1} .$$

Отсюда

$$p_0(t)=(1-r(t))^n ,$$

$$p_k(t)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+)1}{k!}\cdot r^k(t)\cdot(1-r(t))^{n-k} ,$$

$$M(t)=n\cdot r(t) ,$$

где $r(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot(1-\exp(-(\lambda+\mu)\cdot t))$.

Более глубокие исследования, позволяют с помощью производящих функций найти дисперсию и другие моменты высших порядков [10].

Приложение 9

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫЩЛЕННОСТИ (УНИВЕРСИТЕТ)»

Кафедра «Высшая математика»

АНАЛИЗ РАБОТЫ КАССОВЫХ АППАРАТОВ В МАГАЗИНЕ САМООБСЛУЖИВАНИЯ «ПОЛЯНКА»
(ТМО)

Выполнил: студент гр. ________

Шифр зачетной книжки: ______

Проверил: профессор _________

Кемерово 20__

Библиографический список

1. Ахназарова, С.Л. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высшая школа, 1985. – 327 с.
2. Боровков, А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
3. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 384 с.
4. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко: 3-е изд., испр. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 400 с.
5. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебник / Б.В. Гнеденко. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
6. Иванова, С.А. Математика. Теория вероятностей и математическая статистика / С.А. Иванова, В.А. Павский. – Кемерово: КемТИПП, 2013. – 179.
7. Иванова, С.А. Стохастические модели технологических процессов переработки дисперсных систем обезжиренного молока / С.А. Иванова. – Кемерово, 2010. – 124 с.
8. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
9. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
10. Павский, В.А. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач / В.А. Павский, К.В. Павский, В.Г. Хорошевский // Искусственный интеллект. – 2006. – №4 – С. 28-34.
11. Павский, В.А. Моделирование процесса очистки природных и сточных вод / В.А. Павский, Ю.Л. Сколубович, Т.А. Краснова. – Новосибирск: НГАСУ, 2005. – 144 с.
12. Павский, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Павский. – Кемерово: КемТИПП, 2014. – 237 с.

13. Прабху, Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами / Н. Прабху. – М.: Эдиториал УРСС, 1984. – 499с.
14. Саати, Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения / Т.Л. Саати. – М.: Сов. Радио, 1971. – 520 с.
15. Хинчин, А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания /А.Я. Хинчин; под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1963. – 528 с.
16. Хорошевский, В.Г. Архитектура вычислительных систем / В.Г. Хорошевский. - М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. - 520 с.
17. Юстратов, В.П. Моделирование электромембранных процессов / В.П. Юстратов, В.А. Павский, Т.А. Краснова. – Кемерово: КемТИПП, 2004. – 194 с.
18. Ivanova, S.A. Stochastic modeling of protein solution foaming process / S.A. Ivanova, V.A. Pavskii // Theoretical foundations of chemical engineering. – 2014. – V. 48. - №6. – P. 848-854.
19. Ivanova, S.A. Studying the biokinetics of pigmented yeast by stochastic methods / S.A. Ivanova, V.A. Pavsky, M.A. Poplavskaya, M.V. Novoselova // Food and Raw Materials. – 2014. – V.2. - №1. – P. 17-21.
20. Pavskii, V.A. Stochastic simulation and analysis of the operation of computing systems with structural redundancy / V.A. Pavskii, K.V. Pavskii // Optoelectronics, instrumentation and data processing. – 2014. – V. 50. - №4. – P. 363-369.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Павский Валерий Алексеевич

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
(элементы теории и приложения)

Учебное пособие

Для студентов вузов

Редактор
Технический редактор
Художественный редактор

ЛР № 020524 от 02.06.97.
Подписано в печать **.**.**. Формат 60x84 1/16
Бумага типографская. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 7,625. Тираж 301 экз.
Заказ № …

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском отделе
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
(университет)
650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

ПЛД № 44-09 от 10.10.99.
Отпечатано в лаборатории множительной техники
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52